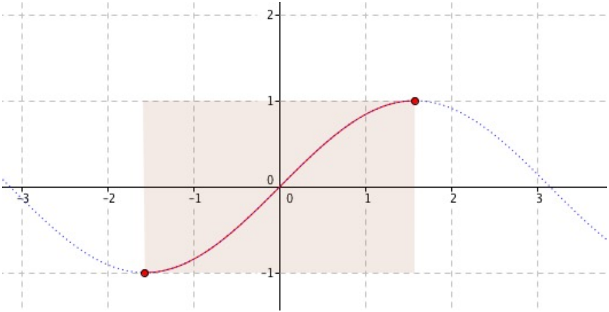
Plan

- sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- L'image par sinus de cet intervalle est $[-1;1]$.

Sinus réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$



Sinus a une bijection reciproque sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Définition

La fonction arcsin est cette bijection réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \arcsin : [-1;1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y & \to & \arcsin y \end{array}$$

$\arcsin y$ est l'unique angle $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = y$.

Exemple : $\arcsin(1)$ est l'unique angle dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut 1. Cet angle est $\frac{\pi}{2}$, donc $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice

Calculer $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Théorème.

1. arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$
2. arcsin est impaire
3. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \arcsin(\sin(x)) = x$
4. $\forall y \in [-1,1], \quad \sin(\arcsin(y)) = y.$
5. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$.

$$\forall y \in]-1,1[, \qquad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Démonstration du point 5

sin est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et sa dérivée est $\sin' x = \cos(x)$.

$$\sin'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}$$

- $x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow y = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;
- $x = -\frac{\pi}{2} \longrightarrow y = \sin -\frac{\pi}{2} = -1$.

Arcsin n'est pas dérivable en 1 et -1 et son graphe a une tangente verticale en ces points

- $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow y \in]-1, 1[$

Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$. Calculons la dérivée.

Soit $y \in]-1,1[$.

$$\mathrm{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sin'(\mathrm{Arcsin}(y))} = \frac{1}{\boxed{\cos(\mathrm{Arcsin}(y))}}.$$

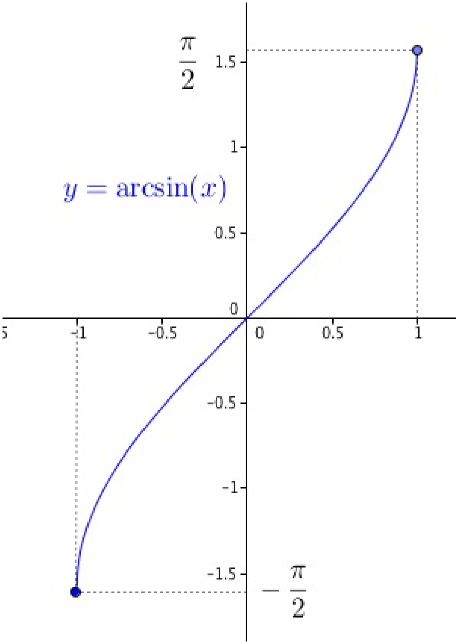
Or

$$\cos^2(\mathrm{Arcsin}(y)) = 1 - \sin^2(\mathrm{Arcsin}(y)) = 1 - y^2$$

$\mathrm{Arcsin}(y) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos(\mathrm{Arcsin}(y)) > 0$ et

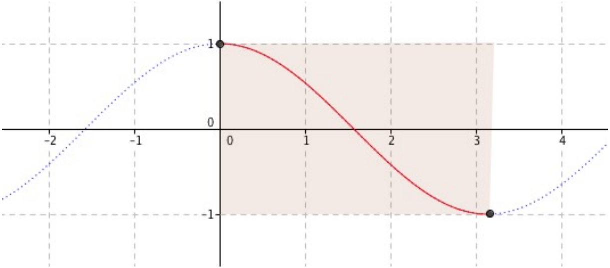
$$\cos(\mathrm{Arcsin}(y)) = \sqrt{\cos^2(\mathrm{Arcsin}(y))} = \boxed{\sqrt{1-y^2}}.$$

$$\mathrm{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$


$\frac{\pi}{2}$
1.5
1
$y = \arcsin(x)$
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1
-0.5
-1
-1.5
$-\frac{\pi}{2}$

- cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$.
- L'image par cosinus de cet intervalle est $[-1; 1]$.

Cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1; 1]$



Cosinus admet une bijection réciproque sur cet intervalle

Définition

La fonction arccos est cette bijection réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \arccos : [-1;1] & \to & [0,\pi] \\ y & \to & \arccos y \end{array}$$

$\arccos y$ est l'unique angle $x \in [0,\pi]$ tel que $\cos x = y$.

Exemple : $\arccos(1)$ est l'unique angle de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut 1. Cet angle est 0, donc $\arccos(1) = 0$.

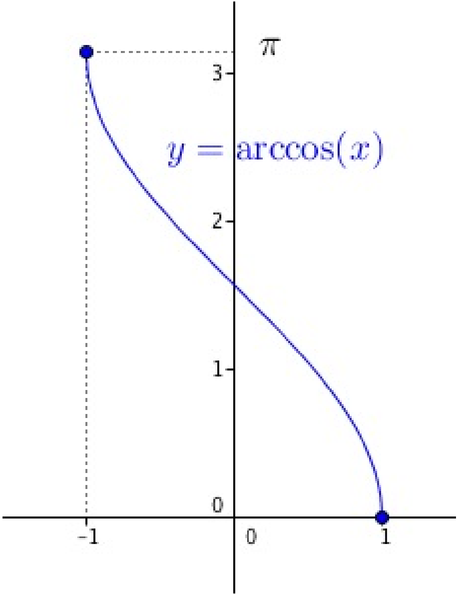
Exercice

Calculer $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Théorème.

1. arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$
2. $\forall x \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x$
3. $\forall y \in [-1,1], \quad \cos(\arccos(y)) = y.$
4. arccos est dérivable sur $]-1,1[$.

$$\forall y \in]-1,1[, \qquad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

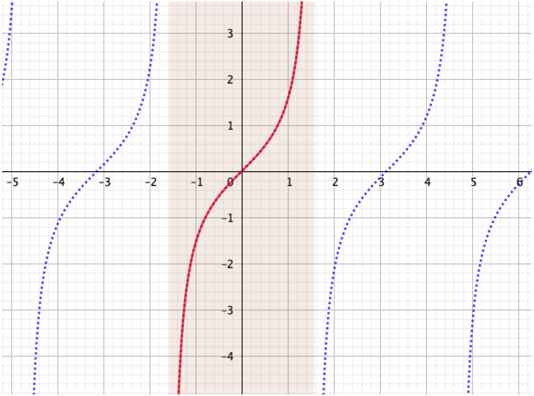


π
3
$y = \arccos(x)$
2
1
0
-1
0
1

La fonction arctan

- est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- L'image par tangente de cet intervalle est $\mathbb{R}$.

Tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$



Tangente a une bijection réciproque sur cet intervalle.

Définition

La fonction arctan est cette bijection réciproque :

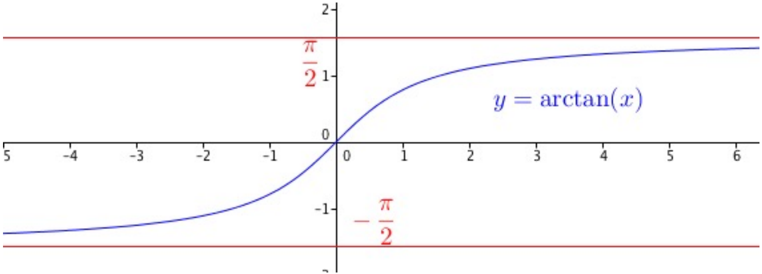
$$\begin{array}{rcl} \arctan : \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y & \to & \arctan y \end{array}$$

$\arctan y$ est l'unique angle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x = y$.

Exemple : $\arctan(0)$ est l'unique angle de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut 0. C'est l'angle 0 et $\arctan(0) = 0$.

Théorème.

1. arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. arctan est impaire.
3. $$\lim_{y \to +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$$
   La droite $y = \frac{\pi}{2}$ est asymptote horizontale en $+\infty$.
4. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan(x)) = x.$
5. $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(y)) = y.$
6. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$


$y = \arctan(x)$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Propriété.

$$\forall x > 0, \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x < 0, \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

Démonstration. On considère

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

C'est une fonction dérivable pour $x \neq 0$, et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+(1/x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{x^2+1} = 0$$

Donc f est une constante sur $]-\infty; 0[$, et une (autre) constante sur $]0, +\infty[$.

Methode 1. On choisit une valeur simple de x. Par exemple, pour $x < 0$, on prend $x = -1$:

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

Ce qui donne l'égalité dans le cas négatif.

$$\forall x < 0, \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

Methode 2. On regarde la limite en $+\infty$.

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} \to \frac{\pi}{2} + \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$$

Ce qui donne l'égalité dans le cas positif.

$$\forall x > 0, \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Et il en reste quoi ?

1. $\arccos x$ est un angle dans quel intervalle ?
2. et $\arcsin x$?
3. Que penser de la formule $\arctan x = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$?

Réponse.

1. $\arccos x$ est un angle dans $[0, \pi]$
2. $\arcsin x$ est un angle dans $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
3. la formule $\arctan x = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$ est fausse ! ! ! ! ! !

Plan

Définition

Le cosinus hyperbolique ch (ou *cosh*)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Le sinus hyperbolique sh (ou *sinh*)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Propriété.

$$[\operatorname{ch}(x)]^2 - [\operatorname{sh}(x)]^2 = 1$$

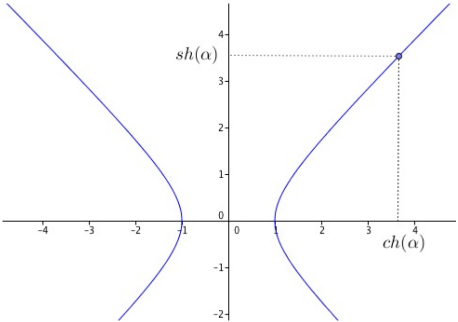
Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$[\operatorname{ch}(x)]^2 - [\operatorname{sh}(x)]^2 = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)$$

$$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= e^{-x} \times e^x = 1$$

Remarque : *ch* et *sh* paramétrent une branche de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$, d'où le nom de cosinus et sinus hyperboliques.



Théorème.

- ch est paire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$$

- sh est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$$

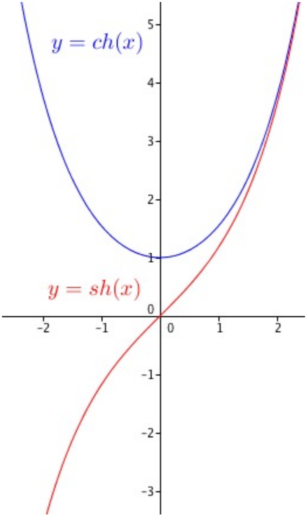
Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{--x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

Donc le ch est bien paire. La fonction exponentielle étant dérivable et continue sur $\mathbb{R}$, ch aussi

$$ch'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$$

$\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x} > 0$, donc la courbe du cosinus hyperpolique est au-dessus de la courbe du sinus hyperbolique, et leur différence tend vers 0 en $+\infty$.



Formules de trigonométrie hyperboliques.

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \quad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a, \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a.$$

La fonction th

Définition

La $\boxed{\text{tangente hyperbolique } \mathrm{th}}$ (ou *tanh*)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Remarque : $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, donc la tangente hyperbolique est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Théorème.

- th est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^2} = 1 - (\mathrm{th}(x))^2$$

- th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
-

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < \mathrm{th}(x) < 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$$