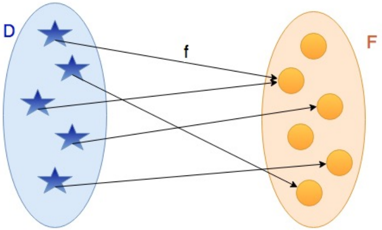
Nouvelles fonctions usuelles

Plan

1 Injections, surjections, bijections

une fonction

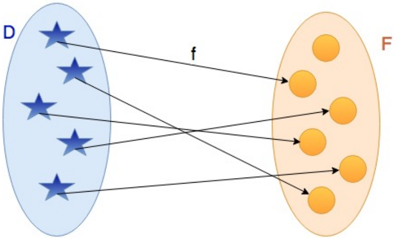
$$\begin{array}{rcl} f: D & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) = \cdots \end{array}$$



f est une injection (f est injective)

$$\Leftrightarrow$$

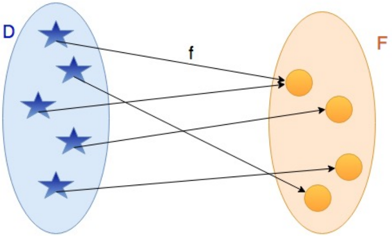
$\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in D$ a au plus une solution.



f est une surjection (f est surjective)

$$\Leftrightarrow$$

$\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in D$ a au moins une solution.



Propriété.

L'ensemble image de f est

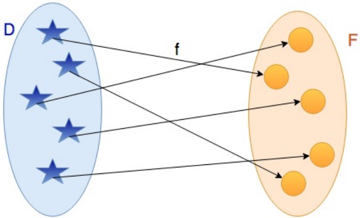
$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\} = \{y \in \mathbb{F} \mid \exists x \in D,\ f(x) = y\}.$$

f est une surjection $\Leftrightarrow f(D) = F$.

f est une bijection (f est bijective) de D sur F

$$\Leftrightarrow$$

$\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in D$ a exactement une solution.

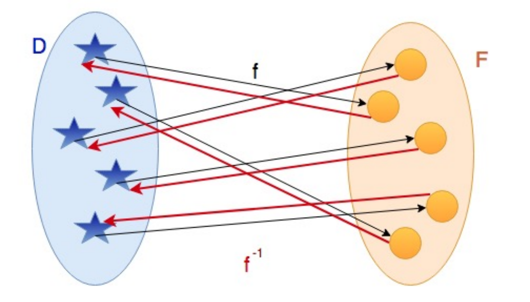


f est bijective $\Leftrightarrow$ f est à la fois injective et surjective.

Définition

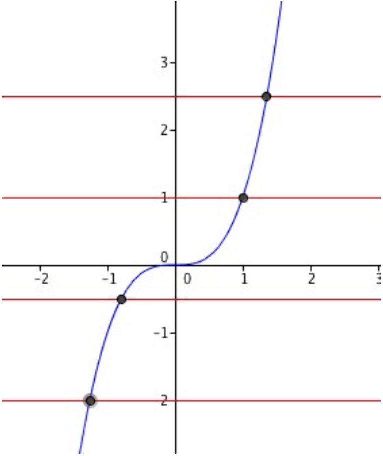
Soit f une bijection de D sur F. la bijection réciproque de f est

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : F & \rightarrow & D \\ y & \rightarrow & f^{-1}(y) = x, \text{ unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}$$



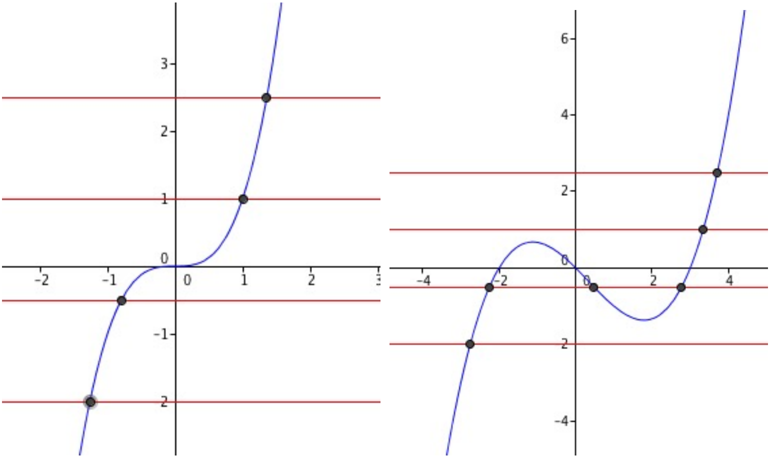
Le cas des fonctions réelles

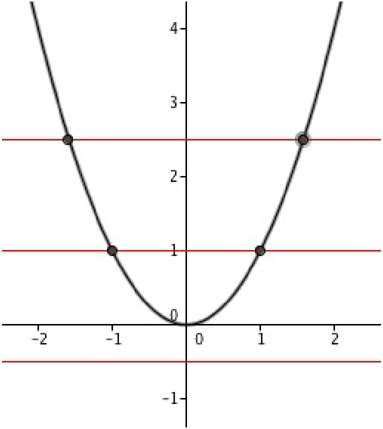
f est une injection si toute droite horizontale $y = a$ ($a \in F$) coupe le graphe de f en au plus un point.



f est une surjection si toute droite horizontale $y = a$ $(a \in F)$ coupe le graphe de f en au moins un point.

Exemples :




4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = x + 1$ si $x < 0$.

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. Par lecture graphique : la fonction f est-elle injective ? surjective ?

Notions. Soit $f : D \to F$ est une fonction

- f est une injection ssi les droites horizontales $y = a$ coupent le graphe de f en au plus un point.
- f est une surjection ssi les droites horizontales $y = a$ coupe le graphe de f en au minimum un point.

Propriété.

Si f est strictement monotone sur I un intervalle,
alors f est une injection.

Exemples : Les fonctions x (sur $\mathbb{R}$), x^3 (sur $\mathbb{R}$), e^x (sur $\mathbb{R}$), $\ln x$ (sur $\mathbb{R}^{+*}$) , $\sqrt{x}$ (sur $\mathbb{R}^+$) sont strictement monotones sur donc ce sont des injections.

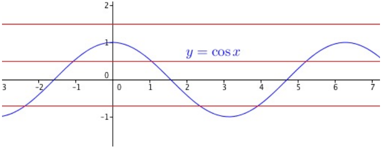
Attention à $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ (pas un intervalle !)

Propriété.

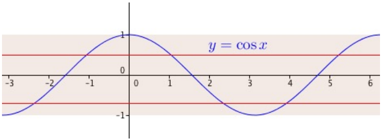
f une fonction. Alors $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & f(D) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est une surjection.

il suffit d'adapter l'espace d'arrivée pour que n'importe quelle fonction devienne une surjection.

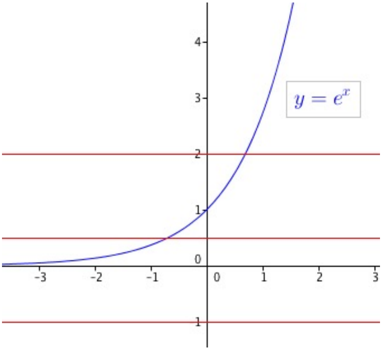
Exemples : Si on prend comme ensemble d'arrivée $F = \mathbb{R}$ pour $\cos x$, alors ce n'est pas une surjection. Mais si on prend $F = [-1, 1]$ alors cos devient une surjection.



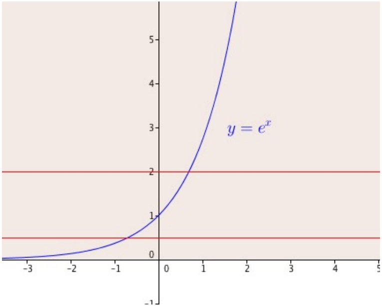
$\Rightarrow$



Si on prend comme ensemble d'arrivée $F = \mathbb{R}$ pour e^x, alors ce n'est pas une surjection. Mais si on prend $F = \mathbb{R}^{+*}$, alors e^x devient une surjection.



$\Rightarrow$



Bijections et bijections réciproques

Propriété.

f est une bijection si toutes les droites $y = a$ coupent le graphe de f exactement une seule fois.

Exemples :

- ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction x^3 est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
- $x \to x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$..... Par contre, c'est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Propriété.

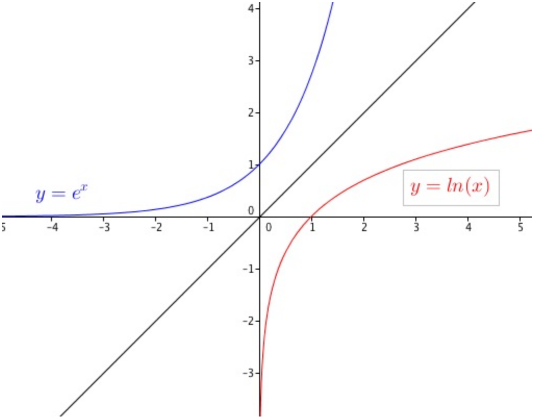
Si f est une bijection de D sur F,

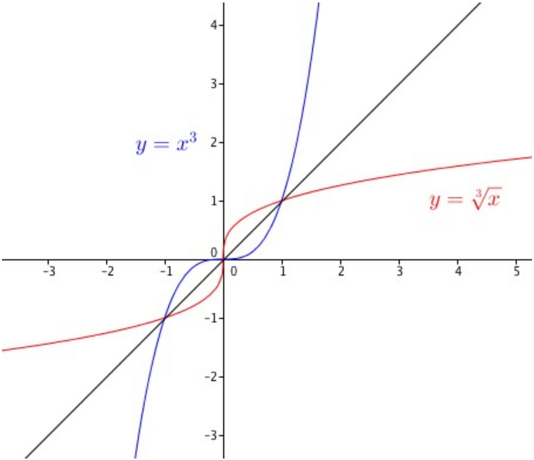
- la bijection réciproque f^{-1} est une fonction de F sur D.
- $f^{-1}(y)$ est l'unique solution x de l'équation $f(x) = y$.
- Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (première bissectrice)

Remarque :

1. $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$
2. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exemples :




$y = x^3$
$y = \sqrt[3]{x}$
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Exercice

On note f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$. On admet (pour l'instant) que c'est une bijection de $[-3/2, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$. Trouver l'expression de $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^+$.

Notion. $f^{-1}(y)$ est l'unique solution x de l'équation $f(x) = y$.

Propriété.

$$\forall x \in D,\ f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in F,\ f\big(f^{-1}(y)\big) = y.$$

Exemple :

$$\ln(\exp(x)) = x$$

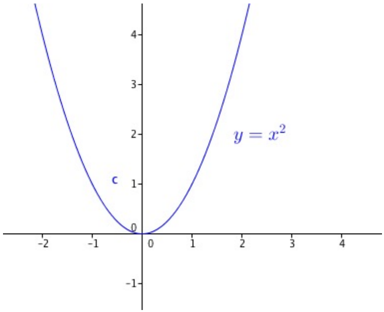
$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

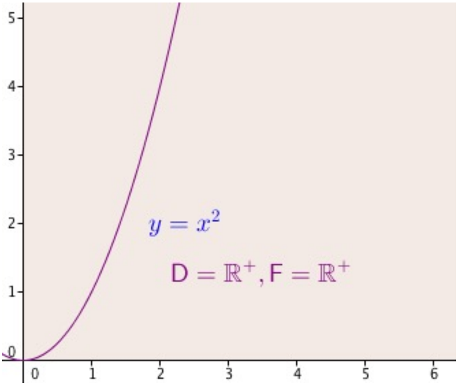
Si $f : D \to F$ n'est pas une bijection :

1. on prend $\widetilde{D}$ une partie de l'ensemble de définition bien adaptée
2. on prend $\widetilde{F}$ une partie de l'ensemble d'arrivée bien adaptée
3. $f : \widetilde{D} \to \widetilde{F}$ est une bijection "extraite" de f

f réalise une bijection de $\widetilde{D}$ sur $\widetilde{F}$.

Exemples : $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas une bijection,
mais $x^2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une bijection.





Théorème. Théorème de la bijection

Soit f une fonction réelle définie sur I un intervalle.

Si f est continue et strictement monotone sur I, alors :

1. f réalise une bijection de I sur $f(I)$,
2. la bijection réciproque est

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & f(I) & \to & I \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = x \text{ tel que } f(x) = y \end{array}$$

3. f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation de f, et continue sur $f(I)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ sur le domaine de définition $D = \mathbb{R}^+$. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc

1. elle réalise une bijection de $D = \mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ (arrivée).
2. Elle a une bijection réciproque

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = x \text{ tel que } y = f(x) = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \end{array}$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

3. f^{-1} est continue et strictement croissante

Théorème. Dérivabilité de la bijection réciproque

Soit $y \in f(I)$ et x tel que $y = f(x)$ associé.

- Si $f'(x) = 0$, alors
  - f^{-1} n'est pas dérivable en y
  - le graphe de f^{-1} a une tangente verticale en y.
- Si $f'(x) \neq 0$, alors
  - f^{-1} est dérivable en y
  - $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemples : La fonction racine carré (bijection réciproque de x^2 sur $\mathbb{R}^+$).
x^2 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée est $2x$.

Soit $y \in \mathbb{R}^+$ et $x = \sqrt{y}$ associé.

1. Si $y \neq 0$, alors $x \neq 0$ et la dérivée $2x \neq 0$. Donc la racine carré est dérivable en $y > 0$ et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

2. Si $y = 0$, alors $x = 0$ et la dérivée $2x = 0$. Donc la racine carré n'est pas dérivable en $y = 0$ et son graphe a une tangente verticale en 0.

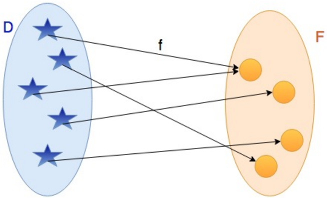
Exercice

Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1. \end{array}$

1. Après avoir étudié la dérivabilité de f, dresser son tableau de variations.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.
3. On considère la bijection $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$.
   1. Quels sont les intervalles de départ et d'arrivée de $\widetilde{f}^{-1}$?
   2. Quel est le sens de variation de $\widetilde{f}^{-1}$?
   3. Déterminer sur quel ensemble $\widetilde{f}^{-1}$ est dérivable. Que se passe-t-il pour $\widetilde{f}^{-1}$ au point d'abscisse 1 ?
   4. Déterminer l'expression de $\widetilde{f}^{-1}(y)$ pour tout $y \in [1,+\infty[$.
   5. Calculer $(\widetilde{f}^{-1})'$ de deux façons.

Et il en reste quoi ?

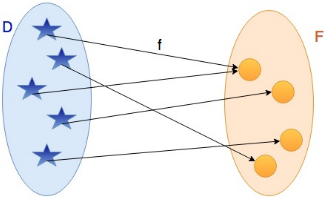
1. Le schéma suivant représente-il une fonction injective, surjective ou bijective ?



2. Si f est une fonction strictement croissante sur $[0,1]$ ayant pour ensemble image $[-1,0]$, que dit alors le théorème de la bijection ?
3. Graphiquement, f et f^{-1} ont quelle particularité ?

Réponse.

1. la fonction est surjective



2. Si f est une fonction strictement croissante sur $[0,1]$ ayant pour ensemble image $[-1,0]$, alors f est bijective et f^{-1} est une fonction strictement croissante sur $[-1,0]$ ayant pour ensemble image $[0,1]$.
3. Graphiquement, les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.