Récurrences et sommes

Plan

1 Le raisonnement par récurrence

2 Sommes et produits

3 La formule du binôme de Newton

Le raisonnement par récurrence

- n_0 un entier fixé
- $Propriete(n)$
  - propriété mathématique (phrase en français ou en notations mathématiques)
  - dépendant d'un entier n pour tout $n \geqslant n_0$. définie pour tout entier

On veut montrer que la propriété est vraie par le principe de récurrence.

Rédaction d'une démonstration par récurrence

Enoncé $\forall n \geqslant n_0$, on considère $Propriete(n)$:

1. **Initialisation** Démonstration de $Propriete(n_0)$ (à la main).
2. **Hérédité**

   Soit un entier $n \geqslant n_0$ tel que $Propriete(n)$ est vraie.

   On déduit $Propriete(n+1)$ en **utilisant** $Propriete(n)$.

Conclusion Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $Propriete(n)$.

Exemple : Soient q un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= q \times u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriete(n) $u_n = q^n$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$. On a $u_0 = 1$ et $q^0 = 1$ donc

$$u_0 = q^0, \quad Propriete(0)$$

- Hérédité

Soit n (fixé) tel que $\boxed{u_n = q^n}$.

(Objectif : $u_{n+1} = q^{n+1}$).

On a par définition de la suite :

$$u_{n+1} = q \times \boxed{u_n} = q \times (q^n) = q^{n+1}$$

Conclusion par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$.

Exercice

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Notions. multiple de $3 = 3k$ avec k un entier.

1. Enoncé de $Propriete(n)$
2. Démonstration de la propriété $Propriete(n_0)$ ou n_0 est le plus petit entier possible.
3. Soit un entier $n \geqslant n_0$ tel que $Propriete(n)$ est vraie. On démontre $Propriete(n+1)$ en utilisant $Propriete(n)$.
4. Conclusion : la propriété est tout le temps vraie.

Plan

1. Le raisonnement par récurrence
2. Sommes et produits
3. La formule du binôme de Newton

Notations sommes et produits

Définition

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres (réels ou complexes).

La somme pour k allant de 0 à n des a_k est

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

La somme pour k allant de m à n des a_k est

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k} = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Remarque : On peut choisir une autre lettre que k.

Exemples :

- Pour $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$ et $a_3 = -2$, on a
$$\sum_{k=0}^{3} a_k = 1 + 2 + 0 - 2 = 1$$
- avec une formule dans a_k :
$$\sum_{k=0}^{5} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Exercice

Calculer $\sum_{k=2}^{4}(k^2+1)$ à la main.

Notion.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$\sum_{k=m}^{n} x = x + x + \cdots + x = (n - m + 1)x$$

Définition

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ fixés et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres (réels ou complexes).

Le produit pour k allant de 0 à n des a_k est

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n} a_k} = a_0 \times a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n,$$

Le produit pour k allant de m à n des a_k est

$$\boxed{\prod_{k=m}^{n} a_k} = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n$$

Exemple :

$$\prod_{k=3}^{5}(k^2+1) = (3^2+1)\times(4^2+1)\times(5^2+1) = 10\times 17\times 26 = 4420$$

Exercice

Calculer à la main

$$\prod_{j=2}^{6}(j-1)$$

Notion.

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} x = x + x + \cdots + x = x^{(n-m+1)}$$

Propriétés

Propriété.

Pour les sommes

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

Pour les produits

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k \qquad \prod_{k=1}^{n} (a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right).$$

Exemple : Calculer $\displaystyle\sum_{k=8}^{11} \frac{2k-1}{7}$ en développant la somme au maximum.

Valeurs classiques

Propriété.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Démonstration.

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\
\displaystyle+\sum_{k=0}^{n} k & = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
\displaystyle 2\sum_{k=0}^{n} k & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \\
 & = & n(n+1) & & & & & & & &
\end{array}
$$

D'où la première égalité.

Pour la deuxième égalité, avec $a \neq 1$:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1 & + & a & + & a^2 & + & \dots & + & a^{n-1} & + & a^n & & \\
\displaystyle -a\sum_{k=0}^{n} a^k & = & -a & - & a^2 & - & \dots & - & a^{n-1} & - & a^n & - & a^{n+1} \\
\hline
\displaystyle (1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1 & - & a^{n+1} & & & & & & & &
\end{array}$$

Comme $a \neq 1$, on peut tout diviser par $1-a$ et on obtient la deuxième égalité.

Plan

1 Le raisonnement par récurrence

2 Sommes et produits

3 La formule du binôme de Newton

La factorielle

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factorielle n est

$$\boxed{n!} = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Par convention,

$$0! = 1$$

Exemple :

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

Les coefficients du binôme

Définition

Le coefficient binomial n, p est

$$\boxed{\binom{n}{p}} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n$$

et $\binom{n}{p} = 0$ sinon.

Exemple :

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{(1 \times 2 \times 3) \times (1 \times 2 \times 3 \times 4)} = \frac{5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= 5 \times 7 = 35$$

Exercice

Donner les valeurs des coefficients binomiaux

$$\binom{6}{p} \quad \text{pour } p = 0, 1, \ldots, 6$$

Notions.

- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$
- $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Propriété.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p},$$

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \text{ (formule de Pascal)}$$

Triangle de Pascal.

Théorème. Le binôme de Newton

$\forall x, y \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

Exemples :

1. Développer $(x-y)^4$.
2. Développer $(x+1)^n$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice

Développer $(x+y)^6$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Théorème. binôme de Newton pour les matrices

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = BA \quad \text{(leur produit commute)}$$

Alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \, B^{n-k}.$$

Attention à bien vérifier que le produit commute ! !

Et il en reste quoi ?

1. Donner le titre des étapes d'un raisonnement par récurrence.
2. Le symbole $\sum_{k=0}^{3} a_k$ se décompose comment ?
3. 9! se lit et se décompose comment ? (sans faire le calcul)
4. Le coefficient binomial n, p s'écrit comment ?
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = ?$

Réponse.

1. le titre des étapes d'un raisonnement par récurrence : Enoncé, initialisation, hérédité, conclusion.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$
3. 9! se lit factorielle 9. $9! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$
4. Le coefficient binomial n, p s'écrit $\binom{n}{p}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$