Géométrie et équations cartésiennes

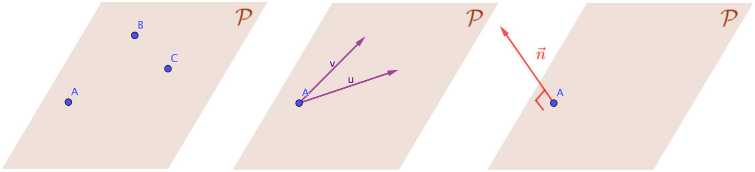
Plans, droites et sphères

$\mathcal{R}(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ repère de l'espace.

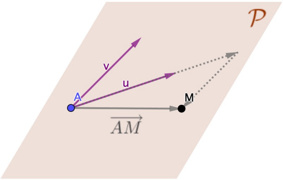
Plan

Caractérisation géométrique d'un plan $\mathcal{P}$:

1. Par trois points non alignés de $\mathcal{P}$.
2. Par un point A et deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de la direction de $\mathcal{P}$.
3. Par un point A et un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$ (orthogonal au plan).



Représentation paramétrique d'un plan



Technique :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists s,t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}\,.$$

En passant aux coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x-\heartsuit \\ y-\heartsuit \\ z-\heartsuit \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \heartsuit \\ \heartsuit \\ \heartsuit \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \heartsuit \\ \heartsuit \\ \heartsuit \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \heartsuit + \heartsuit t + \heartsuit s \\ y = \heartsuit + \heartsuit t + \heartsuit s \\ z = \heartsuit + \heartsuit t + \heartsuit s \end{array} \right. \qquad ((t,s) \in \mathbb{R}^2).$$

C'est un paramètrage du plan $\mathcal{P}$.

A l'inverse, si la solution d'un système est

$$\left\{\begin{array}{l} x = \heartsuit + \spadesuit t + \diamondsuit s \\ y = \heartsuit + \spadesuit t + \diamondsuit s \\ z = \heartsuit + \spadesuit t + \diamondsuit s \end{array}\right. \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x - \heartsuit \\ y - \heartsuit \\ z - \heartsuit \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AM}} = t \underbrace{\begin{pmatrix} \spadesuit \\ \spadesuit \\ \spadesuit \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} \diamondsuit \\ \diamondsuit \\ \diamondsuit \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

avec le point $A(\heartsuit, \heartsuit, \heartsuit)$.

Donc les solutions forment le plan contenant le point A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exercice

Déterminer une représentation paramétrique du plan passant par le point $A(1,0,1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1,2,1)$ et $\vec{v}(0,1,-1)$).

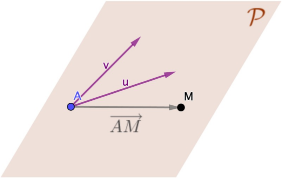
Notion.

- un point $M(x,y,z)$ est sur le plan si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ peut s'exprimer à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- une représentation paramétrique s'exprime sous la forme

$$\begin{cases} x = \cdots \\ y = \cdots \\ z = \cdots \end{cases}$$

et doit contenir des paramètres.

équation cartésienne d'un plan



$$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v} \text{ sont coplanaires}$$

$$\Leftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\cdots \quad \Leftrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0$$

Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

A l'inverse, une équation $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan $\mathcal{P}$.

Exercice

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1, -1, 2)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(2, 0, 1)$ et $\overrightarrow{v}(2, 1, 0)$.

Notions.

- un point $M(x, y, z)$ est sur le plan si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
- trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur déterminant est nul.

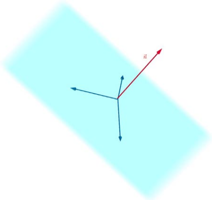
équation cartésienne $\leftrightarrow$ équation paramétrique

- équation cartésienne = système à 1 ligne et 3 inconnues
  - pivot de Gauss
  - solutions à paramètres = équation paramétrique

- Représentation paramétrique
  - une valeur pour les paramètre $\rightarrow$ un point du plan
  - les deux vecteurs directeurs
  - calcul de l'équation cartésienne

Définition

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ si il est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{P}$.



Trouver un vecteur normal :

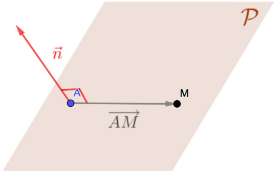
- Dans un repère orthonormal,

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{n}(a, b, c)$$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs

$$\rightarrow \quad \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Technique : Plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.



$$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \cdots$$

Exercice

On munit l'espace d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A(1,0,-2)$, $B(0,2,1)$ et $C(-1,-1,0)$. Calculer un vecteur normal au plan et en déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Distance d'un point à un plan

Propriété.

En repère orthonormal direct.

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0, \qquad A(x_A, y_A, z_A)$$

La distance de A à $\mathcal{P}$ est

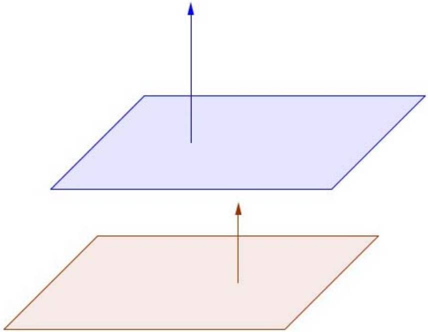
$$\mathrm{d}(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Remarque :

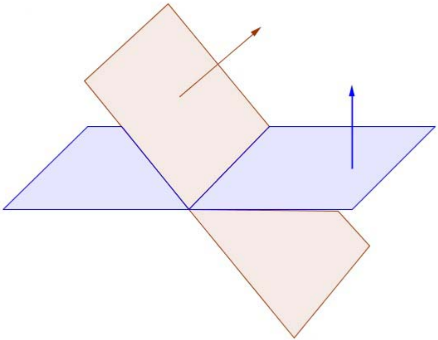
- la plus petite distance entre A et un point du plan $\mathcal{P}$
- Le point le plus proche est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Positions relatives de deux plans de l'espace

Plans parallèles (stricts ou confondus) $\Leftrightarrow$ les vecteurs normaux des deux plans sont colinéaires.



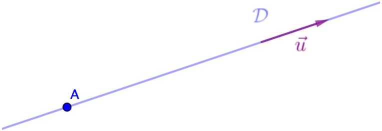
Plans sécants selon une droite $\Leftrightarrow$ les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

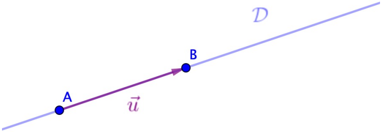


Droites de l'espace

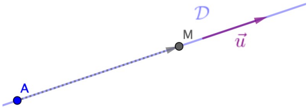
Rappel : Dans l'espace aussi, une droite est définie par

- un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$
- deux points distincts A, B. Alors un vecteur directeur est $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.





Représentation paramétrique d'une droite



Technique : Colinéarité :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}\,.$$

En passant aux coordonnées, on a :

$$\begin{pmatrix} x - \heartsuit \\ y - \heartsuit \\ z - \heartsuit \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \heartsuit \\ \heartsuit \\ \heartsuit \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \heartsuit + \heartsuit t \\ y = \heartsuit + \heartsuit t \\ z = \heartsuit + \heartsuit t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

C'est une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Réciproquement, si la solution d'un système n'a qu'un seul paramètre :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \heartsuit + \spadesuit t \\ y = \heartsuit + \spadesuit t \\ z = \heartsuit + \spadesuit t \end{array}\right. \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x - \heartsuit \\ y - \heartsuit \\ z - \heartsuit \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AM}} = t \underbrace{\begin{pmatrix} \spadesuit \\ \spadesuit \\ \spadesuit \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$$

Les solutions sont la droite passant par le point $A(\heartsuit, \heartsuit, \heartsuit)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$

Exercice

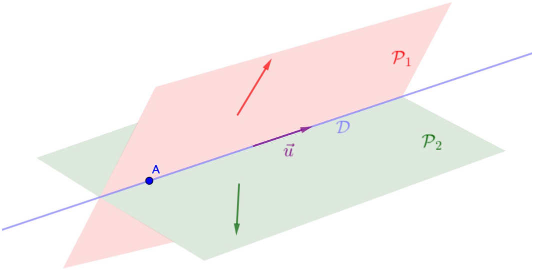
Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(0, -3, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}$ de coordonnées $(1, 3, -2)$.

Notion.

$$M \in \mathcal{D} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}\,.$$

Système d'équations cartésiennes d'une droite

Deux plans sécants se coupent selon une droite.



C'est la méthode pour trouver la représentation cartésienne d'une droite.

Technique : $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par A et dirigée par $\vec{u}$

- $A + \vec{u}+$ un deuxième vecteur $\rightarrow$ un plan $\mathcal{P}_1$: $ax + by + cz + d = 0$
- $A + \vec{u} +$ un troisième vecteur $\rightarrow$ un plan $\mathcal{P}_2$: $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

Le système d'équation de $\mathcal{D}$ est

$$\mathcal{D} \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} ax & + & by & + & cz & + & d & = 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = 0 \end{array} \right.$$

Réciproquement, un système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

représente la droite $\mathcal{D}$ intersection des deux plans

- le plan $ax + by + cz + d = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$
- le plan $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n'}(a', b', c')$.

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est

$$\boxed{\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'}}$$

Remarque :

1. $ax + by + cz + d = 0$ représente un plan et JAMAIS une droite.
2. Une droite $\rightarrow$ système de DEUX équations équations cartésiennes.

Exercice

Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & 3z & + & 1 & = 0 \\ 2x & - & y & + & z & + & 2 & = 0 \end{array}\right. .$$

Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Notion.

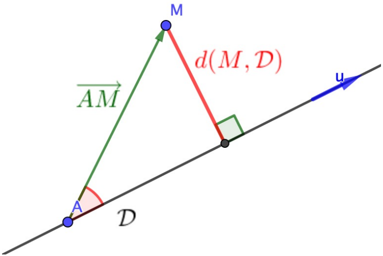
- Résoudre un système permet de calculer les coordonées des points d'intersection des figures représentées par les équations.
- Quand il y a une infinité de solutions, on obtient les solutions sous forme paramétrique (avec un paramètre)

Distance d'un point à une droite

Propriété.

$\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
La distance du point M à $\mathcal{D}$ est

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$



Positions relatives de deux droites de l'espace

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace.

- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles sans point commun
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles avec un point commun $=$ confondues
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un unique point commun $=$ sécantes
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont pas de point commun et ne sont pas parallèles $=$ non coplanaires

Remarque : Si les droites sont parallèles, sécantes ou confondues, elles sont coplanaires

Définition

Deux droites sont dites orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Deux droites sont dites perpendiculaires si elles sont orthogonales et sécantes.

équation cartésienne d'une sphère en repère orthonormal

Définition

Soit Ω un point de l'espace et $R \geqslant 0$.
La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\Omega M = R$$

Technique :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega M = R \quad \Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = R^2$$

après calcul...

$$x^2 + y^2 + z^2 - \heartsuit x - \heartsuit y - \heartsuit z + d = 0$$

C''est l'équation de la sphère.

Exercice

Déterminer l'équation de la sphère de centre $\Omega(0, 2, -2)$ et de rayon $\sqrt{6}$.

Notions.

- Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. M appartient à la sphère si la distance entre le centre et M est égale au rayon
- la distance entre deux points A et B est $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- une équation de sphère commence par $x^2 + y^2 + z^2$ et termine par $= 0$

Inversement, à partir d'une équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz + d = 0$$

- Factoriser avec les formes canoniques (pour x, pour y, pour z)
- Isoler la constante.
- Si elle est positive $\rightarrow$ racine carrée
- Si elle est négative, l'ensemble est vide.

(comme pour les cercle dans le plan)

Et il en reste quoi ?

1. Dans l'espace, quelle est la caractérisation géométrique d'un plan qui utilise des vecteurs ?
2. quel est l'outil de calcul qui correspond et qui sert à faire l'équation cartésienne du plan ?
3. à quoi ressemble l'équation d'un plan ?
4. Quelle est l'équation cartésienne d'une droite dans l'espace ?
5. Quelle est la différence entre une équation de cercle dans le plan et de sphère dans l'espace ?

Et il en reste quoi ?

1. Dans l'espace, la caractérisation géométrique d'un plan est un point et deux vecteur.
2. l'outil de calcul est le déterminant de trois vecteurs.
3. l'équation d'un plan est $ax + by + cz + d = 0$
4. l'équation cartésienne d'une droite dans l'espace n'existe pas. Une droite, c'est un SYSTEME d'équation de plan.
5. une équation de cercle dans le plan et de sphère dans l'espace ont la même allure, sauf que pour la sphère il y a un terme en z^2 et en z en plus.