Géométrie et équations cartésiennes

Cercles et droites

(1)

Plan

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de points

- du plan $\mathcal{P}$: un point, une droite, la réunion de 3 droites, un cercle, une ellipse, le plan en entier, ou même l'ensemble vide...
- de l'espace $\mathcal{E}$: un point, un plan, une droite, une sphère, un cône,....

On cherche à deviner si un point M est dans $\mathcal{A}$ juste par observation de ses coordonnées :

- équations cartésiennes
- équations paramètriques (ou paramètrées).

Définition

Dans le plan
l'équation $F(x,y)=0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{A}$:

$$M(x,y)\in\mathcal{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(x,y)=0$$

Dans l'espace
l'équation $F(x,y,z)=0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{A}$:

$$M(x,y,z)\in\mathcal{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(x,y,z)=0$$

Exemple : La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $2x+y-1=0$:

$$M(x,y)\in D \iff 2x+y-1=0.$$

Le point $A(2,-3)$ vérifie $2\times 2-3-1=0$ donc $A\in D$.
Le point $B(1,5)$ donne $2\times 1+5-1=6\neq 0$, donc $B\notin D$.

Exercice

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble du plan défini par l'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - 6 = 0$$

Les points $A(1, 2)$ et $B(2, -4)$ appartiennent-ils à $\mathcal{A}$?

Notions. Un point est dans un ensemble si les coordonnées du points vérifient l'équation cartésienne.

Technique : Pour établir l'équation cartésienne d'un ensemble $\mathcal{A}$.

1. Soit M un point (de coordonnées (x, y) ou (x, y, z)).
2. $M \in \mathcal{A}$ si M vérifie (*insérer les propriétés géométriques de* M)
3. traduire les propriétés géométrique en calcul avec les coordonnées (norme, produit scalaire, déterminant, proportionalité, produit vectoriel...)
4. Obtenir une équation

Remarque : Pas d'unicité de l'équation !

Équations paramétriques de $\mathcal{A}$

Définition

Une équation parametrique de $\mathcal{A}$: .

$$M(x,y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & f(\lambda_1, \lambda_2, ...) \\ y & = & g(\lambda_1, \lambda_2, ...) \end{array} \right.$$

dans le plan, avec $\lambda_1, \lambda_2, ...$ réels (paramètres) et f, g des fonctions.

$$M(x,y,z) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & f(\lambda_1, \lambda_2, ...) \\ y & = & g(\lambda_1, \lambda_2, ...) \\ z & = & h(\lambda_1, \lambda_2, ...) \end{array} \right.$$

dans l'espace, avec $\lambda_1, \lambda_2, ...$ réels (paramètres) et f, g, h des fonctions

Exemple : (Avec un paramètre)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & f(t) \\ y & = & g(t) \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

représente une courbe paramétrée dans le plan.

Exercice

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble du plan défini par le système paramétrique

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \cos(t) \\ y & = & \sin(t) \end{array} \right. \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Les points $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $D\left(\sqrt{3}, 1\right)$ appartiennent-ils à $\mathcal{F}$?

Notions. Un point est dans un ensemble si on peut trouver une valeur du paramètre qui donne les coordonnées du point.

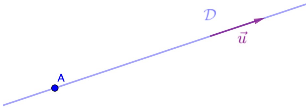
Plan

- $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan
- $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base des vecteurs.
- (x, y) les coordonnées d'un point dans ce repère

Objectif $\rightarrow$ équations de droites et de cercles.

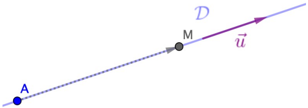
Droites du plan

$\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.



Technique : Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires.}$$



deux approches : proportionalité et déterminant.

Proportionalité

- $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow$ il existe un paramètre $t \in \mathbb{R}$, tel que

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x - \heartsuit \\ y - \heartsuit \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \heartsuit \\ \heartsuit \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \heartsuit + t\heartsuit \\ y = \heartsuit + t\heartsuit \end{cases}$$

On obtient une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

A l'inverse, si la solution d'un système s'écrit avec un paramètre :

$$\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

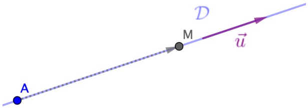
On pose les points $M(x, y)$, $A(a, b)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$$

Donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Les solutions forment une droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.

Déterminant

$\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.



$$M(x,y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\iff \quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$$

$$\dots\dots\dots \iff \quad \boxed{ax + by + c = 0}$$

avec a, b, c des réels. C'est l'équation cartésienne de la droite.

le vecteur $\vec{n}(a,b)$ est un vecteur orthogonal (ou normal) à la droite.

A l'inverse, une équation

$$ax + by + c = 0$$

représente une droite dans le plan.

- Vecteur normal $\vec{n}(a, b)$
- $\rightarrow$ vecteur directeur $\vec{u}(b, -a)$ car $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$
- Il faut trouver une valeur (x, y) qui marche pour trouver un point A de la droite

Exercice

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(2,3)$ et $B(-4,7)$.
2. Donner un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Notions.

- $M(x,y)$ un point est sur la droite passant par A et B signifie ....
- Deux vecteurs sont colinéaires si leur déterminant est nul.
- On trouve le vecteur normal à une droite en prenant le coefficient devant x et le coefficient devant y dans l'équation de la droite.

Exercice

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x - 5y + 8 = 0$. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Notions.

- On peut déterminer des points de la droite en remplaçant une des coordonnée par un nombre et en déduisant l'autre à partir de l'équation.
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si il sont proportionnels $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.
- On peut aussi utiliser un système.

Exercice

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(2,3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,2)$.

Notions.

- un vecteur normal à une droite est un vecteur orthogonal à cette droite.
- Soit $M(x,y)$ un point. M est sur la droite signifie ....
- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Parallélisme et perpendicularité

Définition

$\mathcal{D}$ droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$
$\mathcal{D}'$ droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$

- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

$\mathcal{D}$ droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{D}'$ droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$

Technique : on étudie les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$:

- $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \rightarrow$ vecteurs colinéaires $\rightarrow$ droites parallèles
- Si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}') \neq 0 \rightarrow$ droites sécantes
  - (bonus) Si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}' = 0$ (en repère orthonormal) $\rightarrow$ droites orthogonales.

Propriété.

Les droites parallèles à $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ sont les droites dont une équation cartésienne est

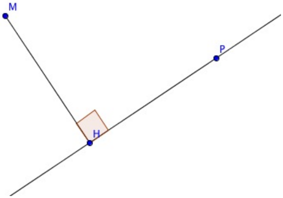
$$ax + by + \gamma = 0, \qquad \text{avec } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Définition

$\mathcal{D}$ une droite du plan et M un point.
On fait le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$.

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = HM \text{ est la } \text{distance de } M \text{ à } \mathcal{D}$$

.



Propriété.

Pour tout point P de $\mathcal{D}$,

$$MP \geqslant \mathrm{d}(M, \mathcal{D})$$

(égalité si $P = H$)

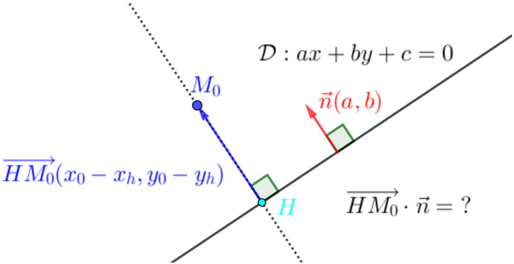
La distance de M à $\mathcal{D}$ est la plus petite distance entre M et les points de $\mathcal{D}$.

Propriété.

En repère orthonormal
La distance de $M_0(x_0, y_0)$ à $\mathcal{D}(ax + by + c = 0)$ est :

$$\mathrm{d}(M_0, \mathcal{D}) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Démonstration.



Exercice

Calculer la distance du point $A(-2, 1)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x - 4y + 4 = 0$.

Notion. La distance de M_0 à $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$\mathrm{d}(M_0, \mathcal{D}) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Intersection de deux droites et systèmes

$$\mathcal{D} : ax + by + c = 0, \qquad \mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$$

$M(x, y)$ est l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$:

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \Longleftrightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Trois cas (c.f. systèmes).

- une seule solution (x_A, y_A) : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en $A(x_A, y_A)$.
- pas de solution : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles (aucun point commun).
- une infinité de solutions : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.

Et il en reste quoi ?

1. Pour trouver l'équation cartésienne d'une figure dans le plan, quelle est la première chose à écrire ?
2. Dans le plan, l'équation $2x + 7y - 6 = 0$ représente quoi ? Et le vecteur $(2, 7)$ est le vecteur .... (?)....
3. Quel est la particularité géométrique qu'on utilise pour établir l'équation d'une droite ?

Réponses

1. Pour trouver l'équation cartésienne d'une figure dans le plan, on pose $M(x, y)$ un point de la figure.
2. l'équation $2x + 7y - 6 = 0$ représente une droite. Et le vecteur $(2, 7)$ est le vecteur normal à la droite.
3. la particularité géométrique qu'on utilise pour établir l'équation d'une droite est l' alignement (ou la colinéarité).

Plan

Etablir l'équation d'un cercle en repère **orthonormal**

$\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r = tous les points qui sont à distance r de A

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad AM = r \quad \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\| \quad = r$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2_{\overrightarrow{AM}} + y^2_{\overrightarrow{AM}}} = r \quad \Leftrightarrow \quad x^2_{\overrightarrow{AM}} + y^2_{\overrightarrow{AM}} = r^2$$

Après développement et mise en ordre :

$$\boxed{x^2 + y^2 + \clubsuit x + \spadesuit y + \heartsuit = 0}$$

est l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice

Donner l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(2, -1)$ et de rayon 4.

Notions.

- Soit $M(x, y)$ un point du plan. M appartient au cercle si la distance entre le centre du cercle et M est égale au rayon
- la distance entre deux points A et B est $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- une équation de cercle commence par $x^2 + y^2$ et termine par $= 0$

A l'inverse, une équation cartésienne $x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0$, représente un cercle ou l'ensemble vide.

Forme canonique d'un trinôme (Rappel) :

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

Exemples :

Trouver un cercle à partir d'une équation.

On veut identifier $\mathcal{C}$ un ensemble de points du plan d'équation

$$x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0$$

Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 - cx} + \underbrace{y^2 - dy} + e = 0 \end{aligned}$$

Technique de la forme canonique (pour x et pour y) puis on regroupe toutes les constantes à droite :

$$(x + \spadesuit)^2 + (y + \heartsuit)^2 = C$$

$$(x+\spadesuit)^2+(y+\heartsuit)^2 = C$$

- si $C<0$: $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide $\emptyset$.
- si $C \geqslant 0$:

$$\sqrt{(x+\spadesuit)^2+(y+\heartsuit)^2}=\sqrt{C}$$

On pose le point $\Omega(-\spadesuit,-\heartsuit)$ et on reconnait alors

$$\Omega M=\sqrt{(x-(-\spadesuit))^2+(y-(-\heartsuit))^2}$$

$$\Omega M=\sqrt{C}$$

Donc $\mathcal{C}$ est un cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{C}$.

Exercice

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal du plan. Reconnaître la partie du plan représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = k$$

pour $k = 3$ puis pour $k = -7$.

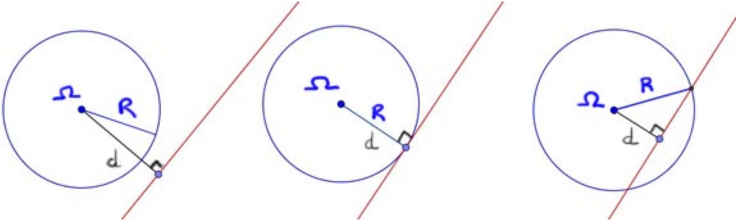
Notions.

- La forme canonique de $x^2 + ax$ se trouve en développant $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$. Idem pour y
- On doit arriver à une expression $(\cdots)^2 + (\cdots)^2 = \textit{constante}$.
- la distance entre deux points A et B est $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Un cercle est l'ensemble des points situé à distance fixe r du centre.

Propriété. Intersection d'une droite et d'un cercle

L'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R est

- l'ensemble vide si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) > R$
- un point unique T si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) = R$. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont tangents en T
- deux points distincts si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) < R$



Pour calculer les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$

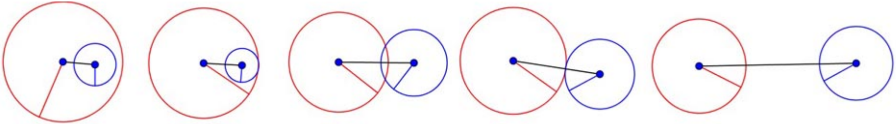
1. Méthode calcul :

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{équation de } \mathcal{D} & \rightarrow \text{isoler } x = \dots \\ \text{équation de } \mathcal{C} & \qquad\qquad\qquad \text{reporter dans } \mathcal{C} \rightarrow y \end{cases}$$

2. Méthode géométrique : le rayon est perpendiculaire à la droite en cas de tangence.

Intersection de deux cercles



Propriété.

Le cercle de centre Ω, rayon R et le cercle de centre ω, rayon r ont une intersection non vide ssi

$$|R - r| \leqslant \Omega\omega \leqslant R + r.$$

Technique : Calculer l'intersection des cercles

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0, \quad \mathcal{C}' : x^2 + y^2 - Cx - Dy + E = 0$$

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0 \\ x^2 + y^2 - Cx - Dy + E = 0 \quad \left(\boxed{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - cx - dy + e = 0 \\ \heartsuit x + \spadesuit y + \diamondsuit = 0. \end{cases}$$

- Si $\heartsuit = \spadesuit = 0$, les deux cercles sont concentriques (même centre). Ils sont confondus s'ils ont le même rayon et ont une intersection vide dans le cas contraire.
- Sinon, les deux cercles ne sont pas concentriques. L_2 est l'équation d'une droite $\mathcal{D}$ (axe radical des deux cercles). On utilise L_2 pour isoler x ou y qu'on reporte dans L_1 pour le déterminer.

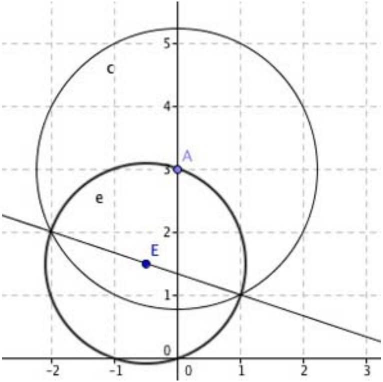
Exercice

On rapporte le plan au repère orthonormal $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$. Déterminer les éventuels points d'intersection de

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0 \text{ et } \mathcal{C}' : x^2 + y^2 + x - 3y = 0$$

Notions

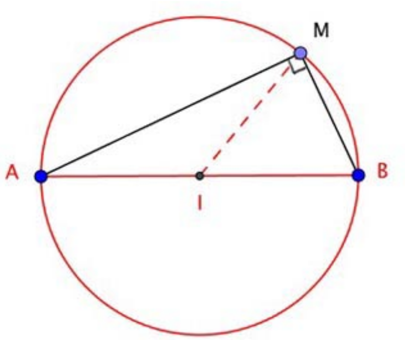
- Trouver l'intersection de plusieurs figures définies par des équations revient à résoudre le système des équations.
- En faisant $L_2 - L_1$, on obtient une équation du premier degré permettant d'isoler x en fonction de y (ou inversement)
- Ensuite on reporte dans l'autre équation pour trouver les coordonnées des solutions du système.


5
4
3
2
1
0
-2
-1
0
1
2
3
c
e
A
E

Une caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$

Propriété.

Soient A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



Démonstration. Soit I le milieu du segment $[AB]$

$$0 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

On a $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \|\overrightarrow{IA}\|.\|\overrightarrow{IB}\| \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \left(\frac{1}{2}AB\right)\left(\frac{1}{2}AB\right) \times (-1)$$

Donc

$$0 = MI^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \iff MI = \frac{AB}{2}$$

Donc le point M est sur le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est à dire le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice

On rapporte le plan au repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Soit $A(1,2)$ et $B(-3,4)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ de la forme $x^2+y^2-Cx-Dy+E=0$, sans calculer ni son centre, ni son rayon.

Notion. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Et il en reste quoi ?

1. Quel est la particularité géométrique qu'on utilise pour établir l'équation d'un cercle ?
2. A quoi ressemble l'équation cartésienne d'un cercle dans le plan ?
3. Pour déterminer l'intersection de deux figures géométriques, quel outil de calcul utiliser ?

Réponses

1. la particularité géométrique qu'on utilise pour établir l'équation d'un cercle est la distance fixe par rapport au centre.
2. l'équation cartésienne d'un cercle dans le plan est $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
3. Pour déterminer l'intersection de deux figures géométriques, on fait un système avec les équations des deux figures.