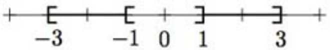
Etude de fonction
(3)

Plan

Définition

un ensemble E est symétrique par rapport à 0
$\Leftrightarrow \forall x \in E, -x \in E$.

Exemple : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ et les intervalles $[-a, a]$ et $]-a, a[$ sont symétriques par rapport à 0.



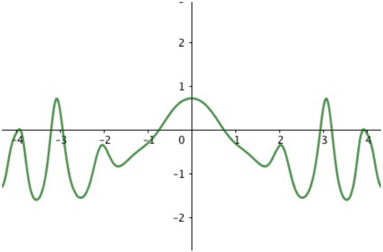
$E = [-3, -1[\cup]1, 3]$ est symétrique par rapport à 0.

Définition

f une fonction définie sur E symétrique par rapport à 0.

$$f \text{ est } \text{paire} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E, f(-x) = f(x).$$

Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



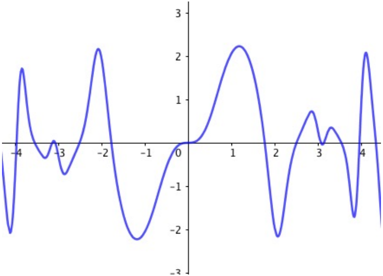
Exemples : Les fonctions cosinus et carré sont paires.

Définition

f une fonction définie sur E symétrique par rapport à 0.

$$f \text{ est } \text{impaire} \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(-x) = -f(x).$$

Le graphe est symétrique par rapport à l'origine.

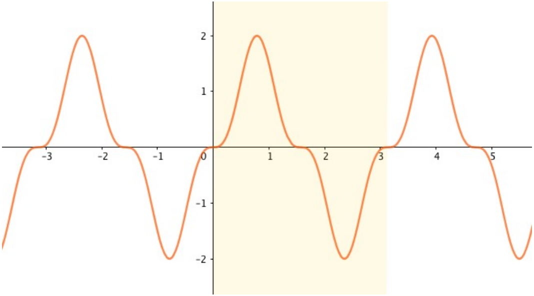


Exemples : Les fonctions sinus, tangente, cube et inverse sont impaires.

Définition

$$f \text{ est } \text{périodique de période } T \text{ (ou } T-\text{périodique)}$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x+T) = f(x).$$

Le graphe d'une fonction $T-$périodique a un motif de longueur T qui se répète.



Exemple : la fonction tangente est π-périodique, Cosinus et sinus sont 2π-périodiques

Pour simplifier l'étude d'une fonction :

- Si elle est paire ou impaire, on étudie la fonction sur la moitié de son domaine de définition puis on fait la symétrie.
- Si elle périodique, on l'étudie sur une période et on répète le graphe.

Exercice

Montrer que la fonction $f(x) = \sin(3x)$ est $\frac{2\pi}{3}$- périodique.

Notion. On dit que f est périodique de période T si pour tout $x \in E$, on a $f(x+T) = f(x)$.

Plan

Définition

f est $\boxed{\text{dérivable en } a}$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie

$$\boxed{f'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

f est $\boxed{\text{dérivable sur } I}$ $\Leftrightarrow$ f est dérivable en tout point de I. On a alors f' la fonction dérivée de f.

Remarque : On n'utilise presque pas la définition pour déterminer si une fonction est dérivable. On utilise principalement la connaissance des domaines de dérivation des fonctions standards, et la conservation de la dérivabilité par les opérations basiques.

Propriétés liées à la dérivée

Propriété.

Soit f une fonction dérivable en un point a, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Exemple : On veut calculer la limite en 0 de

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$$

. On reconnait un taux de variation. On sait que $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Théorème.

Si la fonction f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Attention une fonction peut être continue sans être dérivable !
Par exemple, la fonction valeur absolue $x \to |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

Propriété.

Si f et g sont dérivables sur I, alors

- $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$,
- λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$,
- fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$,
- si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Exercice

Calculer la dérivée des fonction suivantes :

$$f(x) = x^2 \cos(x), \qquad g(x) = \frac{x^2}{\cos x}$$

Propriété. Dérivée de la composée

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$$

Exemple : $h(x) = \sqrt{4+2x}$.c' est la composée $g \circ f$ avec :

1. $f(x) = 4 + 2x$ définie et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Sa dérivée est $f'(x) = 2$.
2. On pose $y = f(x)$. Alors $g(y) = \sqrt{y}$ est définie pour $y \geqslant 0$ et dérivable pour tout $y > 0$. Sa dérivée est $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.
3. On a $y = 4 + 2x$:

$$y \geqslant 0 \Leftrightarrow 4+2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2; \quad y > 0 \Leftrightarrow 4+2x > 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

Donc h est définie sur $[-2, +\infty[$ et est dérivable sur $]-2, +\infty[$.

$$h'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{4+2x}} = \frac{1}{\sqrt{4+2x}}$$

Exercice

Donner le domaine de dérivabilité de h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \cos(x^2 + 3x)$$

et calculer la dérivée.

Notion.

1. Le domaine de dérivation se fait comme le domaine de définition.
2. Les fonctions affines et trigonométriques sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$
3. $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$

Théorème.

f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Remarque : Si, de plus, f' ne s'annule qu'en un nombre fini de point sur I, alors le sens de variation est strictement.

Tableau de variation d'une fonction f On calcule f' et on étudie le signe de f' sur le domaine de dérivation.

x	$-\infty$		a		‖	b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖		$+$	0	$+$	
$f(x)$	ℓ	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	‖		$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$+\infty$

- double barre $=$ f et/ou f'n'est pas défini en cet endroit.
- Dans la ligne de x : domaine de définition de f et valeurs importantes.
- On doit mettre les valeurs au bout des flèches : limites ou valeurs importantes.

Primitives

L'opération inverse de la dérivation est la recherche de primitive.

Définition

f une fonction continue sur un intervalle I.

$$F \text{ est une } \text{primitive} \text{ de } f \text{ sur } I \Leftrightarrow F' = f.$$

Remarque : $F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f.

Déterminer des primitives simples :

- tableau des dérivées à l'envers / tableau des primitive connues :
  - Une primitive de x est $\frac{1}{2}x^2$.
- Composée : une primitive de $f'(x)g(f(x))$ est $G(f(x))$:
  - une primitive de $\frac{2x+1}{x^2+x}$ est $\ln(x^2+x)$.
  - une primitive de $g(ax+b)$ est $\frac{1}{a}G(ax+b)$.
  - une primitive de $(2x-3)^2$ est $\frac{1}{6}(2x-3)^3$.
- Aucune formule pour la primitive d'un produit ou un quotient !
- autre cas : voir calcul d'intégrale.

Exercice

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \exp(3x+2), \quad g(x) = 2x^4, \quad h(x) = \cos x \cos(\sin x)$$

Tangente

Propriété.

La droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

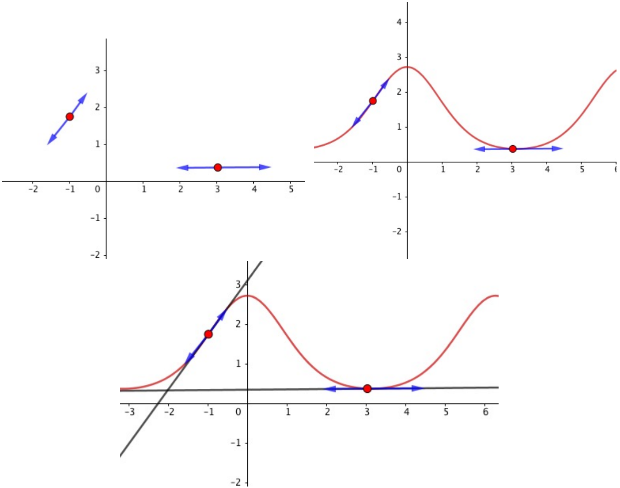
est tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(a, f(a))$.

Remarque : En général, on ne trace qu'un petit bout de la droite, avec une double flèche, au niveau du point $(a, f(a))$. La courbe est collée à la tangente quand on est près de a.

Exemple : En $x = 1$, pour la fonction ln : Comme $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, la tangente a pour équation

$$y = x - 1$$

Exemple : Si on sait que $f(-1) = 1,75$, $f'(-1) = 1,2$, $f(3) = 0,4$ et $f'(3) = 0$:



Tangentes horizontales et verticales :

- $f'(a) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{tangente horizontale}}$ au point de coordonnées $(a, f(a))$.
- "$f'(a) = \infty$" $\Rightarrow$ $\boxed{\text{tangente verticale}}$
  Si au point a :
  - $f(a)$ existe,
  - $f'(a)$ n'existe pas
  - $f'(x)$ tend vers ∞ quand $x \to a$.

  Alors la courbe de f possède une tangente verticale au point de coordonnées $(a, f(a))$.

Remarque : Le comportement d'une fonction en un point peut aussi être différent d'un coté ou de l'autre du point a, dans ce cas, on calcule la limite de f' en a, à gauche et/ou à droite. On obtient alors des demi-tangente.

Plan

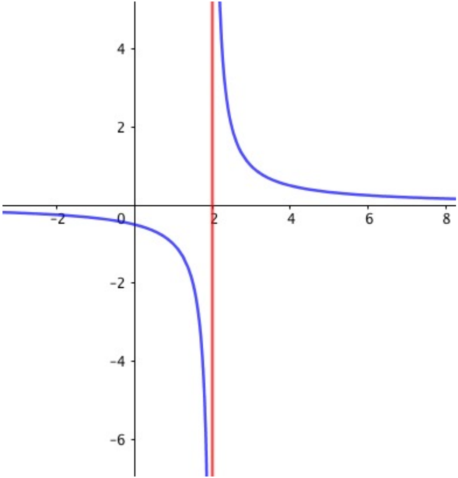
Propriété.

f une fonction qui n'est pas définie en un point a.

- Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ alors f possède une asymptote verticale $x = a$ (à gauche).
- Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ alors f possède une asymptote verticale $x = a$ (à droite).

Remarque : Si la limite est $+\infty$, la coube monte le long de l'asymptote, si la limite est $-\infty$, la courbe descend le long de l'asymptote.

Exemple : $\frac{1}{x-2}$ a une asymptote verticale $x = 2$:



Exercice

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Calculer les limites de f à droite et à gauche de 2. Que peut-on en déduire graphiquement ?

Notion.

- Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ alors la courbe représentative de f possède une asymptote verticale d'équation $x = a$ (à gauche).
- Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ alors la courbe représentative de f possède une asymptote verticale d'équation $x = a$ (à droite).
- Si la limite est $+\infty$, la coube représentative monte le long de l'asymptote, si la limite est $-\infty$, la courbe représentative descend le long de l'asymptote.

Plan

Soit f une fonction définie sur $[c, +\infty[$: quelle allure pour f en $+\infty$? (Idem en $-\infty$)

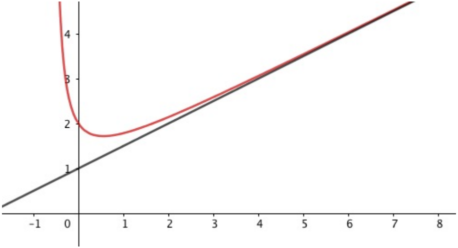
Définition

la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

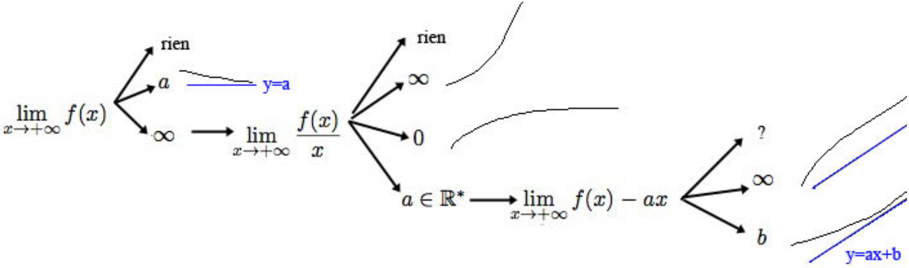
.

Graphiquement, f longe l'asymptote quand x est grand.



Pour trouver les valeurs de *a* et *b* :

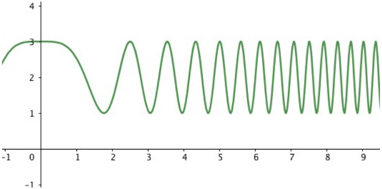
- équivalents
- développements limités
- Méthode ci-dessous :



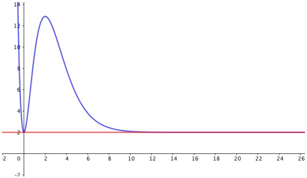
On calcule

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

1. Si f n'a pas de limite en $+\infty$: Rien
2. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$, alors $y = a$ est asymptote horizontale.



1)



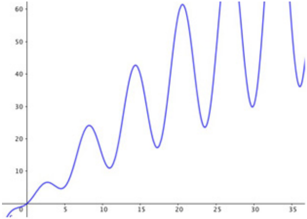
2)

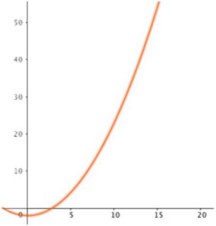
3. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors on calcule

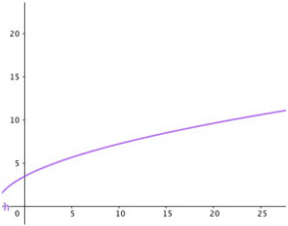
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

1. Si $\dfrac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty$: Rien.
2. Si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, alors branche parabolique de direction (Oy).
3. Si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors branche parabolique de direction (Ox).



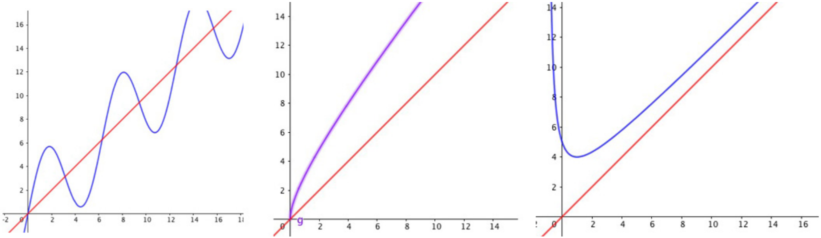




4. Si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ alors on calcule $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$$

1. si $f(x) - ax$ n'a pas de limite en $+\infty$, alors direction asymptotique de pente a.
2. si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \infty$, alors branche parabolique de pente a.
3. si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$ alors asymptote $y = ax + b$.



Et il en reste quoi ?

1. Si une fonction vérifie $f(-x) = -f(x)$ pour tout x, on dit qu'elle est ...(?)....
2. Donner la dérivée de $\frac{f}{g}$
3. Si F est une primitive de f, que vaut F' ?
4. Quand $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$, que peut-on dire ?
5. Quand $\lim_{x \to \infty} f(x) - 2x = 0$, que peut-on dire ?

Réponses

1. Si une fonction vérifie $f(-x) = -f(x)$ pour tout x, on dit qu'elle est impaire.
2. la dérivée de $\frac{f}{g}$ est $\frac{f'g - fg'}{g^2}$
3. Si F est une primitive de f, alors $F' = f$?
4. Quand $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, f admet une asymptote verticale $x = 3$.
5. Quand $\lim_{x\to\infty} f(x) - 2x = 0$, f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = 2x$.