Etude de fonction

(3)

Plan

Le cadre.

D désigne

- soit I un intervalle.
  ses bords = les extrémités de l'intervalle (réels ou infini)
- soit $I \backslash \{d\}$ un intervalle privé d'un point d.
  Ses bords = extrémités de l'intervalle (réels ou infini) et d

Exemple : Les bords de $[-2, 3[\cup]3, +\infty[$ sont -2, 3 et $+\infty$.

Un voisinage de a est une portion, autour de a, de l'ensemble de définition de f

$$V_a = V \cap D$$

- $V =$ intervalle ouvert contenant a si $a \in \mathbb{R}$
- $V =]c; +\infty[$ si $a = +\infty$
- $V =]-\infty; c[$ si $a = -\infty$

On parle de propriété locale, ou propriété valable localement quand elle est valable sur un voisinage.

limites de f en a (bord de D)

- f tend vers ℓ en a (ou f a pour limite ℓ) :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell} \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists V_a, \quad \forall x \in V_a, \quad f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$$

- f tend vers $+\infty$ en a :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty} \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists V_a, \quad \forall x \in V_a, \quad f \geqslant A$$

- f tend vers $-\infty$ en a :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty} \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists V_a, \quad \forall x \in V_a, \quad f \leqslant A$$

Si elle existe, la limite en a de f est unique

Opérations simples sur les limites

Pour calculer une limite :

- limites connues des fonctions basiques
- règles d'opérations entre limites (voir tableaux).
- techniques complémentaires quand ça ne suffit pas

$\lim(1)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(2)$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(1)+\lim(2)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminée

Exercice

$$\lim_{x\to 2} x^2+5x = ?, \qquad \lim_{x\to 0} \ln(x) - 4x^2 = ?$$

$\lim(1)$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(2)$	ℓ'	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$
$\lim(1) \times \lim(2)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim(1)$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(2)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(1) \times \lim(2)$	ind.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exercice

$$\lim_{x \to 0} e^x \ln(x) = ?, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x \ln(x) = ?$$

Notations :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = 0^+} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ et } f \geqslant 0 \text{ sur } V_a$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = 0^-} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ et } f \leqslant 0 \text{ sur } V_a$$

Exemple :

$$\lim_{x \to 2} (x-2)^2 = 0, \quad \forall x \in V_2 =]1, 3[, \quad (x-2)^2 \geqslant 0.$$

Donc

$$\lim_{x \to 2} (x-2)^2 = 0^+$$

lim(1)	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	ℓ ou 0	0
lim(2)	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\frac{\lim(1)}{\lim(2)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	indét.

lim(1)	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
lim(2)	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\frac{\lim(1)}{\lim(2)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	indét.

Exercice

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\ln x} = ? \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{(x-2)^2} = ?$$

forme indéterminée = tout est possible (limite finie ou limite infinie ou pas de limite), ça dépend de la situaiton.

En cas de forme indéterminées,
il faut lever l'indétermination

c'est-à-dire transformer l'expression pour ne plus avoir de forme indéterminée.

Propriété. limite « dans » une fonction

Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \boxed{b} \qquad \lim_{\boxed{y \to b}} g(y) = \ell$$

alors

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \ell.$$

Exemple : On veut faire la limite en $+\infty$ de $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin(1/x)}{1/x} = g(y), \quad \text{avec } y = \frac{1}{x}, \quad g(y) = \frac{\sin y}{y}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{y \to 0} g(y) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Propriété. avec une suite

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a$, alors

$$\lim_{n \to \infty} f(u_n) = \ell$$

Technique : Si on trouve deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a telles que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ n'ont pas la même limite, alors la fonction f n'a pas de limite en a.

Exemple : La fonction sinus en $+\infty$:

$$u_n = n\pi \to +\infty, \qquad v_n = 2n\pi + \pi/2 \to +\infty$$

$$\sin(n\pi) = 0 \to 0, \qquad \sin(2n\pi + \pi/2) = 1 \to 1$$

Donc la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$

La technique du terme dominant

En cas de forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$
(ou $\infty - \infty$) quand $x \to \infty$

1. Au numérateur :
   On factorise toute l'expression par le terme dominant (celui qui va le plus vite à l'infini).
   La totalité du terme dominant !
2. Au dénominateur, idem. Mais ce n'est pas forcément le même terme dominant.
3. On simplifie
4. on calcule chacune des limites, la forme indéterminée doit avoir disparu.

Cette technique sert aussi à établir les équivalents.

Exemple : Calculer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{x^2 \ln x + x - \ln x}{x^3 + x \ln x}$$

.

Formes indéterminées $\infty - \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise

$$f(x) = \frac{x^2 \ln x \left(1 + \frac{x}{x^2 \ln x} - \frac{\ln x}{x^2 \ln x}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{x \ln x}{x^3}\right)} = \frac{\ln x \left(1 + \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right)}$$

Remarque : Pour faire des termes dominant, il faut des quantités qui tendent vers ∞!

Limites et inégalités

Théorème. passage à la limite dans une inégalité

Si au voisinage de a,

$$f \leqslant g$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x).$$

Remarque : Attention avec des inégalités strictes :

$$f < g \quad \to \quad \lim_{x \to a} f(x) \boxed{\leqslant} \lim_{x \to a} g(x)$$

Théorème. des gendarmes

Si au voisinage de a

$$f \leqslant g \leqslant h \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell$$

Exemple : Calculer la limite de $\frac{\sin \sqrt{x}}{x^2}$ quand $x \to +\infty$.

$$\forall x > \pi, \quad -1 \leqslant \sin \sqrt{x} \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{-1}{x^2} \leqslant \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

Comme $\frac{-1}{x^2}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 quand $x \to \infty$, on a par théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2} = 0$$

Corollaire.

Si au voisinage de a

$$|f| \leqslant g \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Théorème.

Si au voisinage de a

$$f \leqslant g \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

alors

$$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$$

Théorème.

Si au voisinage de a

$$f \leqslant g \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Et il en reste quoi ?

1. Donner les quatre formes indéterminées en calcul de limite.
2. Quel est le terme dominant de l'expression $7x^{999} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{5}} + 45\ln(x+12)$ en $+\infty$?
3. f, g, h trois fonctions telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 3$. Que peut-on dire sur g ?

Réponses

1. les quatre formes indéterminées en calcul de limite : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$
2. le terme dominant de l'expression $7x^{999} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{5}} + 45\ln(x+12)$ est $-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{5}}$
3. SI f, g, h trois fonctions telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 3$, alors $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$.

Plan

Fonction négligeable devant une autre

Définition

f est négligeable devant g au voisinage de a

$$f(x) = \boxed{\underset{x \to a}{o}}\big(g(x)\big) \qquad f = o_a(g)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemple : $\ln x$ est négligeable devant x au voisinage de ∞ car $\frac{\ln x}{x} \to 0$ quand $x \to \infty$.

Fonction équivalente à une autre

Définition

f est équivalente à g au voisinage de a

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \qquad f \underset{a}{\sim} g$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Remarque : $f \sim g$ et $g \sim f$

Exemple : Pour $x > 1$:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \to 1 \qquad (x \to \infty)$$

Donc

$$\sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

Un polynôme est équivalent à

- son terme de plus haut degré en $\pm\infty$
- son terme de plus petit degré en 0.

Exemple :

$$3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 29 \underset{x \to +\infty}{\sim} 3x^4,$$

$$3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 29 \underset{x \to 0}{\sim} -29$$

Exercice

Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \qquad g(x) = \frac{2}{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{4x^2}$$

1. Calculer la limite quand $x \to +\infty$ de $\frac{f}{g}$ et $\frac{h}{g}$.
2. Les fonction f et g sont-elles équivalentes ?
3. Entre g et h, laquelle est négligeable devant l'autre ?

Notions.

- f est négligeable devant g au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
- f et g sont équivalentes au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Propriété.

Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$ (non nul)

$$f \underset{a}{\sim} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} f = \ell$$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, donc $\cos x \underset{x \to 0}{\sim} 1$.

il ne faut jamais écrire $f \underset{a}{\sim} 0$ (même si f tend vers 0) ! !

Application

Une fonction est équivalente à son terme dominant.

Exemple : On cherche un équivalent de l'expression suivante en $+\infty$:

$$\frac{5\ln x + 3x^2 - 7xe^x}{9x^4 + 5\sqrt{x}} = \frac{-7xe^x\left(\frac{5\ln x}{-7xe^x} + \frac{3x^2}{-7xe^x} + 1\right)}{9x^4\left(1 + \frac{5\sqrt{x}}{9x^4}\right)}$$

$$= \frac{-7e^x}{9x^3}\frac{\left(\frac{5\ln x}{-7xe^x} + \frac{3x}{-7e^x} + 1\right)}{\left(1 + \frac{5}{9x^3\sqrt{x}}\right)}$$

Or $\frac{5\ln x}{-7xe^x}$, $\frac{3x}{-7e^x}$ et $\frac{5}{9x^3\sqrt{x}}$ tendent vers 0 par croissance comparée. Donc

$$\frac{\left(\frac{5\ln x}{-7xe^x} + \frac{3x}{-7e^x} + 1\right)}{\left(1 + \frac{5}{9x^3\sqrt{x}}\right)} \to 1 \sim 1, \qquad \frac{5\ln x + 3x^2 - 7xe^x}{9x^4 + 5\sqrt{x}} \sim \frac{-7e^x}{9x^3}$$

Propriété.

$$\text{Si} \quad f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \lim_{x \to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}},$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Pour calculer une limite compliquée, on peut chercher un équivalent plus simple et calculer la limite à partir de l'équivalent !

Exemple : Au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{5\ln x + 3x^2 - 7xe^x}{9x^4 + 5\sqrt{x}} \sim \frac{-7e^x}{9x^3}$$

Par croissance comparée, $\lim_{x \to +\infty} \frac{-7e^x}{9x^3} = -\infty$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5\ln x + 3x^2 - 7xe^x}{9x^4 + 5\sqrt{x}} = -\infty$$

Propriété. Equivalent pour une fonction dérivable

$$\text{Si } f'(a) \neq 0,$$

alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

Exemple : $f(x) = \ln(5x+4) - \ln(19)$ pour $x \to 3$.

$$f(3) = \ln(19) - \ln 19 = 0, \qquad f'(x) = \frac{5}{5x+4}, \quad f'(3) = \frac{5}{19} \neq 0$$

Donc

$$\ln(5x+4) - \ln(19) \underset{x \to 3}{\sim} \frac{5}{19}(x-3)$$

Exercice

Déterminer un équivalent de $f : x \mapsto \tan(x) - \sqrt{3}$ en $\frac{\pi}{3}$

Propriété. Formules à savoir

$\boxed{X}$ est une quantité tendant vers 0

$$\sin(\boxed{X}) \underset{X\to 0}{\sim} \boxed{X} \qquad \tan(\boxed{X}) \underset{X\to 0}{\sim} \boxed{X}$$

$$\ln(1+\boxed{X}) \underset{X\to 0}{\sim} \boxed{X} \qquad e^{\boxed{X}}-1 \underset{X\to 0}{\sim} \boxed{X}$$

$$(1+\boxed{X})^{\alpha}-1 \underset{X\to 0}{\sim} \alpha\boxed{X}$$

$$1-\cos(\boxed{X}) \underset{X\to 0}{\sim} \frac{\boxed{X}^2}{2}$$

$X \to 0$

Exemples :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad 1-\cos(2x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(2x)^2}{2}$$

$$\tan(\ln(3x-2)) \underset{x\to 1}{\sim} \ln(3x-2) \qquad \text{car } \ln(3x-2) \to 0$$

Technique : Si x ne tend pas vers 0 :

- si on a $x \to a$ un nombre, alors on pose $x = a + h$ avec $h \to 0$.
- si on a $x \to +\infty$, alors on pose $x = \frac{1}{h}$ avec $h \to 0^+$.
- si on a $x \to -\infty$, alors on pose $x = \frac{1}{h}$ avec $h \to 0^-$.

puis on remplace dans la fonction et on essaye de la transformer afin d'utiliser les équivalents pour $h \to 0$.

Exemple : Equivalent de $f(x) = \sin(2x)$ quand $x \to \frac{\pi}{2}$. On pose $x = \frac{\pi}{2} + h$ avec $h \to 0$:

$$f(x) = \sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)\right) = \sin(\pi + 2h) = -\sin(2h) \underset{h \to 0}{\sim} -2h$$

On revient à x :

$$f(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Propriété. Opérations autorisées

Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} u$, alors

$$fg \underset{a}{\sim} hu, \qquad \frac{f}{g} \underset{a}{\sim} \frac{h}{u} \quad (\text{ si } g(a) \neq 0, u(a) \neq 0)$$

Si on a un équivalent en a : $f(y) \underset{y \to a}{\sim} g(y)$ et une fonction $h(x)$ qui tend vers a quand $x \to b$, alors

$$f(h(x)) \underset{x \to b}{\sim} g(h(x))$$

On ne peux rien additionner ou soustraire à des équivalents. On ne peut pas appliquer une fonction sur un équivalent. Les seules opérations autorisées sont la multiplication, la division et remplacer la variable par une fonction dans un équivalent.

Exemple : $1 - x \underset{x \to +\infty}{\sim} 2 - x$ car

$$\frac{1-x}{2-x} = \frac{x(1/x-1)}{x(2/x-1)} = \frac{1/x-1}{2/x-1} \to 1, \quad x \to +\infty$$

Mais $(1-x)+x = 1$ n'est pas équivalent à $(2-x)+x = 2$.

Exercice

Montrer que

$$x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$$

Puis montrer que e^{x^2+x} n'est pas équivalent à e^{x^2}

Limites : à gauche et à droite

Définition

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- limite à droite en a : $x \to a$ avec $x > a$:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

- limite à gauche en a : $x \to a$ avec $x < a$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$$

Remarque : $f(a)$ n'intervient pas dans ce calcul de limite.

Exemple : En tout nombre entier $m \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière admet une limite à gauche égale à $m - 1$ et une limite à droite égale à m.

Propriété.

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$.
2. Si $a \in D$ et si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$, alors f n'admet pas de limite en a. (Idem pour a^-)
3. Si $a \in D$ et
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
4. Si $a \notin D$ et
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$
alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

Exemple : Étudier les limites à gauche et à droite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \lfloor -|x| \rfloor$.
La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Et il en reste quoi ?

1. la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de $+\infty$ signifie ... ?
2. Les fonctions f et g sont équivalentes en 0 signifie ... ?
3. Quand $x \to 0$, $\sin x \sim$?
4. Parmi les opérations suivantes, lesquelles sont autorisées avec les équivalents : addition, soustraction, multiplication, division, appliquer exponentielle, appliquer un ln ?

Réponses

1. la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de $+\infty$ signifie $\lim_{+\infty} \frac{f}{g} = 0$
2. Les fonctions f et g sont équivalentes en 0 signifie $\lim_0 \frac{f}{g} = 1$
3. Quand $x \to 0$, $\sin x \sim x$
4. Parmi les opérations suivantes, sont autorisées avec les équivalents : multiplication, division.