Plan

Fonction négligeable devant une autre

Définition

f est négligeable devant g au voisinage de a

$$f(x) = \boxed{\underset{x\to a}{o}}(g(x)) \qquad f = o_a(g)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemple : $\ln x$ est négligeable devant x au voisinage de ∞ car $\frac{\ln x}{x} \to 0$ quand $x \to \infty$.

Fonction équivalente à une autre

Définition

f est équivalente à g au voisinage de a

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \qquad f \underset{a}{\sim} g$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Remarque : $f \sim g$ et $g \sim f$

Exemple : Pour $x > 1$:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \to 1 \qquad (x \to \infty)$$

Donc

$$\sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

Un polynôme est équivalent à

- son terme de plus haut degré en $\pm\infty$
- son terme de plus petit degré en 0.

Exemple :

$$3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 29 \underset{x \to +\infty}{\sim} 3x^4,$$

$$3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 29 \underset{x \to 0}{\sim} -29$$

Exercice

Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \qquad g(x) = \frac{2}{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{4x^2}$$

1. Calculer la limite quand $x \to +\infty$ de $\frac{f}{g}$ et $\frac{h}{g}$.
2. Les fonction f et g sont-elles équivalentes ?
3. Entre g et h, laquelle est négligeable devant l'autre ?

Notions.

- f est négligeable devant g au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
- f et g sont équivalentes au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Propriété.

Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$ (non nul)

$$f \underset{a}{\sim} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} f = \ell$$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, donc $\cos x \underset{x \to 0}{\sim} 1$.

$\boxed{\text{il ne faut jamais écrire } f \underset{a}{\sim} 0}$ (même si f tend vers 0) ! !

Application

Une fonction est équivalente à son terme dominant.

Exemple : On cherche un équivalent de l'expression suivante en $+\infty$:

$$\frac{5\ln x + 3x^2 - 7xe^x}{9x^4 + 5\sqrt{x}} = \frac{-7xe^x\left(\frac{5\ln x}{-7xe^x} + \frac{3x^2}{-7xe^x} + 1\right)}{9x^4\left(1 + \frac{5\sqrt{x}}{9x^4}\right)}$$

$$= \frac{-7e^x}{9x^3}\frac{\left(\frac{5\ln x}{-7xe^x} + \frac{3x}{-7e^x} + 1\right)}{\left(1 + \frac{5}{9x^3\sqrt{x}}\right)}$$

Or $\frac{5\ln x}{-7xe^x}$, $\frac{3x}{-7e^x}$ et $\frac{5}{9x^3\sqrt{x}}$ tendent vers 0 par croissance comparée. Donc

$$\frac{\left(\frac{5\ln x}{-7xe^x} + \frac{3x}{-7e^x} + 1\right)}{\left(1 + \frac{5}{9x^3\sqrt{x}}\right)} \to 1 \sim 1, \qquad \frac{5\ln x + 3x^2 - 7xe^x}{9x^4 + 5\sqrt{x}} \sim \frac{-7e^x}{9x^3}$$

Propriété.

$$\text{Si} \quad f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \lim_{x \to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}},$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Pour calculer une limite compliquée, on peut chercher un équivalent plus simple et calculer la limite à partir de l'équivalent !

Exemple : Au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{5\ln x + 3x^2 - 7xe^x}{9x^4 + 5\sqrt{x}} \sim \frac{-7e^x}{9x^3}$$

Par croissance comparée, $\lim_{x \to +\infty} \frac{-7e^x}{9x^3} = -\infty$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5\ln x + 3x^2 - 7xe^x}{9x^4 + 5\sqrt{x}} = -\infty$$

Propriété. Equivalent pour une fonction dérivable

$$\text{Si } f'(a) \neq 0,$$

alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x - a)$$

Exemple : $f(x) = \ln(5x + 4) - \ln(19)$ pour $x \to 3$.

$$f(3) = \ln(19) - \ln 19 = 0, \qquad f'(x) = \frac{5}{5x + 4}, \quad f'(3) = \frac{5}{19} \neq 0$$

Donc

$$\ln(5x + 4) - \ln(19) \underset{x \to 3}{\sim} \frac{5}{19}(x - 3)$$

Exercice

Déterminer un équivalent de $f : x \mapsto \tan(x) - \sqrt{3}$ en $\frac{\pi}{3}$

Propriété. Formules à savoir

$\boxed{X}$ est une quantité tendant vers 0

$$\sin(\boxed{X}) \underset{X\to 0}{\sim} \boxed{X} \qquad \tan(\boxed{X}) \underset{X\to 0}{\sim} \boxed{X}$$

$$\ln(1+\boxed{X}) \underset{X\to 0}{\sim} \boxed{X} \qquad e^{\boxed{X}} - 1 \underset{X\to 0}{\sim} \boxed{X}$$

$$(1+\boxed{X})^{\alpha} - 1 \underset{X\to 0}{\sim} \alpha\boxed{X}$$

$$1-\cos(\boxed{X}) \underset{X\to 0}{\sim} \frac{\boxed{X}^2}{2}$$

$X \to 0$

Exemples :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad 1-\cos(2x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(2x)^2}{2}$$

$$\tan(\ln(3x-2)) \underset{x\to 1}{\sim} \ln(3x-2) \qquad \text{car } \ln(3x-2) \to 0$$

Technique : Si x ne tend pas vers 0 :

- si on a $x \to a$ un nombre, alors on pose $x = a + h$ avec $h \to 0$.
- si on a $x \to +\infty$, alors on pose $x = \frac{1}{h}$ avec $h \to 0^+$.
- si on a $x \to -\infty$, alors on pose $x = \frac{1}{h}$ avec $h \to 0^-$.

puis on remplace dans la fonction et on essaye de la transformer afin d'utiliser les équivalents pour $h \to 0$.

Exemple : Equivalent de $f(x) = \sin(2x)$ quand $x \to \frac{\pi}{2}$. On pose $x = \frac{\pi}{2} + h$ avec $h \to 0$:

$$f(x) = \sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)\right) = \sin(\pi + 2h) = -\sin(2h) \underset{h \to 0}{\sim} -2h$$

On revient à x :

$$f(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Propriété. Opérations autorisées

Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} u$, alors

$$fg \underset{a}{\sim} hu, \qquad \frac{f}{g} \underset{a}{\sim} \frac{h}{u} \quad (\text{ si } g(a) \neq 0, u(a) \neq 0)$$

Si on a un équivalent en a : $f(y) \underset{y \to a}{\sim} g(y)$ et une fonction $h(x)$ qui tend vers a quand $x \to b$, alors

$$f(h(x)) \underset{x \to b}{\sim} g(h(x))$$

.

On ne peux rien additionner ou soustraire à des équivalents. On ne peut pas appliquer une fonction sur un équivalent. Les seules opérations autorisées sont la multiplication, la division et remplacer la variable par une fonction dans un équivalent.

Exemple : $1 - x \underset{x \to +\infty}{\sim} 2 - x$ car

$$\frac{1-x}{2-x} = \frac{x(1/x-1)}{x(2/x-1)} = \frac{1/x-1}{2/x-1} \to 1, \quad x \to +\infty$$

Mais $(1-x)+x = 1$ n'est pas équivalent à $(2-x)+x = 2$.

Exercice

Montrer que

$$x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$$

Puis montrer que e^{x^2+x} n'est pas équivalent à e^{x^2}

Limites : à gauche et à droite

Définition

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- limite à droite en a : $x \to a$ avec $x > a$:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

- limite à gauche en a : $x \to a$ avec $x < a$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$$

Remarque : $f(a)$ n'intervient pas dans ce calcul de limite.

Exemple : En tout nombre entier $m \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière admet une limite à gauche égale à $m - 1$ et une limite à droite égale à m.

Propriété.

1. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$.
2. Si $a \in D$ et si $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$, alors f n'admet pas de limite en a. (Idem pour a^-)
3. Si $a \in D$ et
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
4. Si $a \notin D$ et
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$
alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

Exemple : Étudier les limites à gauche et à droite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \lfloor -|x| \rfloor$.
La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Plan

Continuité en un point

Définition

La fonction f est continue en $a \in D \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

Exemple :

- a doit être dans l'ensemble de définition de f !
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 puisque $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$.
- La fonction partie entière n'est pas continue en $m \in \mathbb{Z}$.

Continuité sur une partie de $\mathbb{R}$

Définition

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ (fonction définie sur D et à valeur dans $\mathbb{R}$).

f est continue sur D $\Leftrightarrow$ f est continue en tout point de D.

$\mathcal{C}(D, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$= l'ensemble des fonctions continues sur D.

La continuité sur D la courbe représentative de f peut être dessinée sans lever le crayon sur chaque intervalle de D.

Exemples : Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition... sauf la partie entière !

- Les fonctions polynomiales, sin, cos et exp sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+}$.
- Les fonction inverses sont continues sur $\mathbb{R}^{*}$.

Propriété.

Si f, g sont continues sur D, alors
$\lambda f + \mu g$, fg et $\frac{f}{g}$ (si si g ne s'annule pas sur D) sont continues sur D.

Si la fonction f est continue sur D_f et si la fonction g est continue sur $f(D_f)$, alors $g \circ f$ est continue sur D_f.

Exemple : La fonction

$$x \to h(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{\boxed{x^2 - 1}}$$

est la composé $f \circ g$ de $g(x) = \boxed{x^2 - 1}$ et $f(y) = \frac{1}{\boxed{y}}$.

f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, c'est à dire quand $\boxed{y} \neq 0$.

Il faut que $y = g(x) \neq 0$. On cherche les solutions de $\boxed{x^2 - 1} = 0$, c'est à dire $x = 1$ et $x = -1$.

Donc le domaine de définition de h est $\mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$. Les fonctions f et g sont continues sur leur domaine de définition respectifs, donc leur composée est continue sur son domaine de définition. Donc h est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.

Exercice

Sur quel ensemble la fonction $f(x) = \ln(2x-3)$ est-elle continue ?

Théorème. des valeurs intermédiaires

- intervalle I
- f continue sur I
- $a < b$ dans I

Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = y$$

Corollaire.

Si en plus f est strictement monotone sur $[a, b]$, alors c est unique.

Propriété.

L'image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle.

Et il en reste quoi ?

1. la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de $+\infty$ signifie ... ?
2. Les fonctions f et g sont équivalentes en 0 signifie ... ?
3. Quand $x \to 0$, $\sin x \sim ?$
4. Parmi les opérations suivantes, lesquelles sont autorisées avec les équivalents : addition, soustraction, multiplication, division, appliquer exponentielle, appliquer un ln ?
5. De quoi parle le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction f continue sur $[a, b]$?

Réponses

1. la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de $+\infty$ signifie $\lim_{+\infty} \frac{f}{g} = 0$
2. Les fonctions f et g sont équivalentes en 0 signifie $\lim_0 \frac{f}{g} = 1$
3. Quand $x \to 0$, $\sin x \sim x$
4. Parmi les opérations suivantes, sont autorisées avec les équivalents : multiplication, division.
5. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.