Etude de fonctions

étudier une fonction :

1. ensemble de définition E et ensemble de dérivation
2. périodicité
3. parité
4. dérivée
5. tableau de variation (limites, tangentes)
6. asymptotes
7. graphe

Plan

ensemble de définition = tous les x pour lesquels $f(x)$ est défini (existe / peut être calculé).

Rédaction

- $f(x)$ est définie pour $x \in E$
- $f(x)$ est définie si $x \geqslant a$
- $f(x)$ est définie si $x < a$
- $f(x)$ est définie si $b \leqslant x \leqslant a$
- .....

Plusieurs fonctions en addition, soustraction, multiplication

$\rightarrow$ Chaque domaine de définition séparément, puis intersection des domaine

Composée $g(f(x))$:

1. domaine de la fonction intérieure seule
   $\boxed{f(x) \text{ est définie si } x \in D_f}$
2. Domaine de la fonction extérieure seule en posant $\boxed{y = f(x)}$.
   $\boxed{g(y) \text{ est définie si } y \in E}$.
3. On remplace $y = f(x) \rightarrow$ $\boxed{\text{équation en } x \text{ à résoudre}}$ $\rightarrow D_g$
4. domaine de définition de $g(f(x))$ $\boxed{D_f \cap D_g}$

Plusieurs niveaux de composée : on part de celle qui est la plus à l'intérieur et on remonte progressivement.

Exemple : Trouver l'ensemble de définition de $h(x) = \sqrt{1-x}$.

- La fonction à l'intérieur $1-x$

$$1 - x \text{ est défini pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

- La fonction à l'extérieur

$$y = 1 - x \quad \to \quad \sqrt{y}$$

$$\sqrt{y} \text{ est défini si } y \in \mathbb{R}^+, \text{ c'est-à-dire si } y \geqslant 0.$$

- $y = 1 - x$

$$1 - x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geqslant x$$

- Bilan $x \in \mathbb{R}$ et $1 \geqslant x$. Donc l'ensemble de définition est

$$]-\infty, 1]$$

Exercice

Déterminer l'ensemble de définition de la foncton

$$f(x) = \ln(2 + x)$$

Notion. Pour une composée $g(f(x))$:

1. fonction intérieure seule : « $f(x)$ est définie si $x \in D_f$ »
2. fonction extérieure seule en remplaçant $y = f(x)$: « $g(y)$ est définie si $y \in E$ ».
3. $y = f(x)$ donne $f(x) \in E$ qu'il faut résoudre. ça donne D_g
4. On fait l'intersection $D_f \cap D_g$.

Ensemble de dérivation.

L'ensemble de dérivation = ensemble sur lequel f est dérivable

- à déterminé AVANT de dériver ! !
- comme un ensemble de définition, en remplaçant « défini » par « dérivable ».
- Les fonctions standards ont les mêmes ensembles de définition et de dérivation, donc on fait les deux à la fois en écrivant défini et dérivable
- Exceptions : racine carrée, valeur absolue, arcsinus et arccosinus.

Exemple : Trouver l'ensemble de dérivation de $h(x) = \sqrt{1-x}$.

- La fonction à l'intérieur :
$$1 - x \text{ est dérivable pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
- La fonction à l'extérieur : $y = 1 - x \to \sqrt{y}$.
$$\sqrt{y} \text{ est dérivable si } y \in \mathbb{R}^{+*}, \text{ c'est-à-dire si } y > 0.$$
- $y = 1 - x$
$$1 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > x$$
- Bilan : $x \in \mathbb{R}$ et $1 > x$. Donc l'ensemble de dérivation est
$$]-\infty, 1[$$

A noter. L'ensemble de dérivation est soit égal à l'ensemble de définition, soit plus petit.

Plan

Le cadre.

D désigne

- soit I un intervalle.
  ses bords $=$ les extrémités de l'intervalle (réels ou infini)
- soit $I\backslash\{d\}$ un intervalle privé d'un point d.
  Ses bords $=$ extrémités de l'intervalle (réels ou infini) et d

Exemple : Les bords de $[-2,3[\,\cup\,]3,+\infty[$ sont -2, 3 et $+\infty$.

Un voisinage de a est une portion, autour de a, de l'ensemble de définition de f

$$V_a = V \cap D$$

- $V =$ intervalle ouvert contenant a si $a \in \mathbb{R}$
- $V =]c; +\infty[$ si $a = +\infty$
- $V =]-\infty; c[$ si $a = -\infty$

On parle de propriété locale, ou propriété valable localement quand elle est valable sur un voisinage.

limites de f en a (bord de D)

- f tend vers ℓ en a (ou f a pour limite ℓ) :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists V_a, \quad \forall x \in V_a, \quad f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$$

- f tend vers $+\infty$ en a :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists V_a, \quad \forall x \in V_a, \quad f \geqslant A$$

- f tend vers $-\infty$ en a :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists V_a, \quad \forall x \in V_a, \quad f \leqslant A$$

Si elle existe, la limite en a de f est unique

Opérations simples sur les limites

Pour calculer une limite :

- limites connues des fonctions basiques
- règles d'opérations entre limites (voir tableaux).
- techniques complémentaires quand ça ne suffit pas

lim(1)	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim(2)	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim(1) + lim(2)	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminée

Exercice

$$\lim_{x\to 2} x^2 + 5x = ?, \qquad \lim_{x\to 0} \ln(x) - 4x^2 = ?$$

$\lim(1)$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(2)$	ℓ'	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$
$\lim(1) \times \lim(2)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim(1)$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(2)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(1) \times \lim(2)$	ind.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exercice

$$\lim_{x \to 0} e^x \ln(x) = ?, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x \ln(x) = ?$$

Notations :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = 0^+} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ et } f \geqslant 0 \text{ sur } V_a$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = 0^-} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ et } f \leqslant 0 \text{ sur } V_a$$

Exemple :

$$\lim_{x \to 2} (x-2)^2 = 0, \quad \forall x \in V_2 =]1,3[, \quad (x-2)^2 \geqslant 0.$$

Donc

$$\lim_{x \to 2} (x-2)^2 = 0^+$$

$\lim(1)$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	ℓ ou 0	0
$\lim(2)$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\frac{\lim(1)}{\lim(2)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	indét.

$\lim(1)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim(2)$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\frac{\lim(1)}{\lim(2)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	indét.

Exercice

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\ln x} = ? \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)^2} = ?$$

forme indéterminée = tout est possible (limite finie ou limite infinie ou pas de limite), ça dépend de la situaiton.

En cas de forme indéterminées,
il faut lever l'indétermination

c'est-à-dire transformer l'expression pour ne plus avoir de forme indéterminée.

Propriété. limite « dans » une fonction

Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \boxed{b} \qquad \lim_{\boxed{y \to b}} g(y) = \ell$$

alors

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \ell.$$

Exemple : On veut faire la limite en $+\infty$ de $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin(1/x)}{1/x} = g(y), \quad \text{avec } y = \frac{1}{x}, \quad g(y) = \frac{\sin y}{y}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{y\to 0} g(y) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Propriété. avec une suite

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{n \to \infty} u_n = a$, alors

$$\lim_{n \to \infty} f(u_n) = \ell$$

Technique : Si on trouve deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a telles que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ n'ont pas la même limite, alors la fonction f n'a pas de limite en a.

Exemple : La fonction sinus en $+\infty$:

$$u_n = n\pi \to +\infty, \qquad v_n = 2n\pi + \pi/2 \to +\infty$$

$$\sin(n\pi) = 0 \to 0, \qquad \sin(2n\pi + \pi/2) = 1 \to 1$$

Donc la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$

La technique du terme dominant

En cas de forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ (ou $\infty - \infty$) quand $x \to \infty$

1. Au numérateur :
   On factorise toute l'expression par le terme dominant (celui qui va le plus vite à l'infini).
   La totalité du terme dominant !
2. Au dénominateur, idem. Mais ce n'est pas forcément le même terme dominant.
3. On simplifie
4. on calcule chacune des limites, la forme indéterminée doit avoir disparu.

Cette technique sert aussi à établir les équivalents.

Exemple : Calculer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{x^2 \ln x + x - \ln x}{x^3 + x \ln x}$$

.

Formes indéterminées $\infty - \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise

$$f(x) = \frac{x^2 \ln x \left(1 + \frac{x}{x^2 \ln x} - \frac{\ln x}{x^2 \ln x}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{x \ln x}{x^3}\right)} = \frac{\ln x \left(1 + \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right)}$$

Remarque : Pour faire des termes dominant, il faut des quantités qui tendent vers ∞!

Limites et inégalités

Théorème. passage à la limite dans une inégalité

Si au voisinage de a,

$$f \leqslant g$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x).$$

Remarque : Attention avec des inégalités strictes :

$$f < g \quad \to \quad \lim_{x \to a} f(x) \boxed{\leqslant} \lim_{x \to a} g(x)$$

Théorème. des gendarmes

Si au voisinage de a

$$f \leqslant g \leqslant h \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell$$

Exemple : Calculer la limite de $\frac{\sin\sqrt{x}}{x^2}$ quand $x \to +\infty$.

$$\forall x > \pi, \quad -1 \leqslant \sin\sqrt{x} \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{-1}{x^2} \leqslant \frac{\sin\sqrt{x}}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

Comme $\frac{-1}{x^2}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 quand $x \to \infty$, on a par théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x^2} = 0$$

Corollaire.

Si au voisinage de a

$$|f| \leqslant g \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Théorème.

Si au voisinage de a

$$f \leqslant g \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

alors

$$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$$

Théorème.

Si au voisinage de a

$$f \leqslant g \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Et il en reste quoi ?

1. C'est quoi, l'ensemble de définition d'une fonction f ?
2. Donner les quatre formes indéterminées en calcul de limite.
3. Quel est le terme dominant de l'expression $7x^{999} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{5}} + 45\ln(x+12)$ en $+\infty$?
4. f, g, h trois fonctions telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 3$. Que peut-on dire sur g ?

Réponses

1. l'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble de tous les réels x tel que $f(x)$ est défini ($f(x)$ est un nombre qui existe).
2. les quatre formes indéterminées en calcul de limite : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$
3. le terme dominant de l'expression $7x^{999} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{5}} + 45\ln(x+12)$ est $-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{5}}$
4. SI f, g, h trois fonctions telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 3$, alors $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$.