Plan

1. Analyser et résoudre un système
2. Pivot de Gauss total

Pour faire la solution d'un système :

la méthode du pivot de Gauss partiel

On part d'un système linéaire et on le transforme progressivement en un système plus "simple" en utilisant des opérations spécifiques sur les lignes.

Opérations sur les lignes

On note (L_i) l'équation située à la ligne i du système.

Définition

opérations élémentaires sur les lignes

- $(L_i \leftarrow \alpha L_i)$: on remplace la ligne L_i par la ligne $\alpha \times L_i$, avec $\alpha \neq 0$.
- $(L_j \leftarrow \lambda L_j + \alpha L_i)$: on remplace la ligne j par un multiple de la ligne j plus un multiple de la ligne L_i, avec $\lambda \neq 0$

Le nouveau système obtenu est équivalent au précédent, il a exactement les mêmes solutions.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ 3x- & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3) \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ 5x- & 3y- & z = & 4 \end{array}\right.$$

Simplification d'un système : le pivot de Gauss partiel

On répète les étapes suivantes :

1. On choisit un coefficient du système, on l'encadre. C'est le pivot.
   - le pivot doit être non nul.
   - Pas plus d'un pivot par ligne et par colonne.

   c'est définitif, il restera encadré jusqu'à la fin de la résolution.
2. A l'aide du pivot, on annule le maximum de termes dans sa colonne.
   - On ne modifie pas les lignes dans lesquels il y a déjà un pivot. (partiel)
   - Pour les lignes sans pivot, on applique une opération élémentaire de la forme $L_k \leftarrow cL_k + dL_j$ qui utilise la ligne du pivot de manière faire apparaitre un 0 dans la colonne du pivot.

On répète ces étapes jusqu'à ce qu'on ne puisse plus choisir de pivot. On obtient une réduite de Gauss.

Exemple : Appliquer la méthode du Pivot de Gauss au système

$$(S)\begin{cases} 2x + z = 4 - 3y \\ 4y + z - 6 = -3x \\ 3y = 5 + z - 2x \\ x = 3 - 3y \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & +3y & +z & = 4,\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4 \\ 3x & +4y & +z & = 6,\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4 \\ 2x & +3y & -z & = 5,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4 \\ \boxed{1}x & +3y & & = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} & -3y & +z & = -2,\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ & -5y & +z & = -3,\ L_2, \leftarrow L_2 + L_3 \\ & -3y & \boxed{-1}z & = -1 \\ \boxed{1}x & +3y & & = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} & -6y & & = -3, L_1 \leftarrow 8L_1 - 6L_2 \\ & \boxed{-8}y & & = -4 \\ & -3y & \boxed{-1}z & = -1, \\ \boxed{1}x & +3y & & = 3 \end{array} \right.$$

On aurait pu aussi d'abord faire $L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$ pour simplifier avant de choisir le pivot.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} & & 0 & = 0 \\ & \boxed{-8}y & & = -4 \\ & -3y & \boxed{-1}z & = -1, \\ \boxed{1}x & +3y & & = 3 \end{array} \right.$$

Exercice

Appliquer la méthode du Pivot de Gauss au système (S) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Notion.

- On choisit et on encadre un pivot : Non nul, Pas plus d'un pivot par ligne et par colonne. il reste encadré à chaque étape du calcul.
- A l'aide de ce pivot, on élimine le maximum de termes dans la colonne du pivot (la colonne j) pour faire apparaître des 0, sans toucher aux lignes qui ont déjà un pivot.

Analyse de la réduite de Gauss

Définition

- rang du système = le nombre de pivot.
- équation principale = une équation qui contient un pivot,
- équation secondaire ou auxiliaire = une équation qui ne contient pas de pivot,
- inconnue principale = une inconnue dont l'un des coefficients est un pivot
- inconnue auxiliaire = une inconnue dont aucun des coefficients n'est un pivot

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & & 0 & = 0 \\ & \boxed{-8}\,y & & = -4 \\ & -3y & \boxed{-1}\,z & = -1, \\ \boxed{1}\,x & +3y & & = 3 \end{array}\right.$$

- le système est de rang 3
- trois variables principales x, y et z
- trois équations principales L_2, L_3 et L_4
- une équation auxiliaire L_1

La solution du système est $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \boxed{1}x & +y & +2z & =1 & L_1 \\ 2x & -3y & +3z & =2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -x & +4y & -z & =-1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$(L_3 + L_2)$

$$\left\{\begin{array}{llll} \boxed{1}x & +y & +2z & =1 \\ & \boxed{-5}y & -z & =0 \\ & 5y & +z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{llll} \boxed{1}x & +y & +2z & =1 \\ & \boxed{-5}y & -z & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right.}_{reduite}$$

- le système est de rang 2
- deux variables principales x et y
- une variable auxiliaire z
- deux équations principales L_1 et L_2
- une équation auxiliaire L_3

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{llll} \boxed{1}x & +y & = 0 & L_1 \\ 2x & -3y & = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -x & +4y & = 2 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} \boxed{1}x & +y & = 0 & L_1 \\ & \boxed{-5}y & = -1 & L_2 \\ & 5y & = 2 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{lll} \boxed{1}x & +y & = 0 \\ & \boxed{-5}y & = -1 \\ & 0 & = 1 \end{array}\right.}_{\textit{reduite}}$$

- le système est de rang 2
- deux variables principales x et y
- deux équations principales L_1 et L_2
- une équation auxiliaire L_3

Exercice

Appliquer le pivot de Gauss partiel au système suivant et déterminer le rang du système. Préciser le nombre de variable principale et de variable auxiliaire.

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & -y & -z & =0 \\ 3x & +y & +3z & =1 \end{array}\right.$$

Notion.

- On choisit et on encadre un pivot : Non nul, Pas plus d'un pivot par ligne et par colonne. il reste encadré à chaque étape du calcul.
- A l'aide de ce pivot, on élimine le maximum de termes dans la colonne du pivot (la colonne j) pour faire apparaître des 0, sans toucher aux lignes qui ont déjà un pivot.
- Le rang du système est le nombre de pivot.
- Une variable principale a un pivot. Une variable auxiliaire n'a pas de pivot.

Déterminer les solutions

Sur la réduite de Gauss :

1. Si une des équations auxiliaire est $0 = b$: pas de solutions.
2. Sinon
   1. S'il n'y a pas d'inconnues auxiliaire, il y a une solution unique.
   2. Si il y a des inconnues auxiliaire, alors il y a une infinité de solutions. On remplace chaque inconnue auxiliaire par un paramètre $(\lambda_1; \lambda_2; \dots)$, puis on calcule les inconnues principales en fonction de ces paramètres.

Remarque : A chaque ligne, on doit déterminer la variable portant le pivot encadré !

Exemples :

$$\left\{\begin{array}{llll} \boxed{1}x & +y & & = 1 \\ & \boxed{-5}y & & = 0 \\ & 0 & & = 0 \end{array}\right.$$

Pas de $0 = b$ donc il y a des solutions.
Il n'y a pas d'inconnue auxiliaire, donc il y a une unique solution (x, y).

La deuxième équation donne $y = 0$, qu'on reporte dans la première et on trouve $x = 1$.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{llll} \boxed{1}x & +y & & = 0 \\ & \boxed{-5}y & & = -1 \\ & 0 & & = 1 \end{array}\right.$$

Une équation auxiliaire est $0 = 1$ donc le système n'a pas de solution.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \boxed{2}x & -y & -z & = 0 \\ & \boxed{5}y & +9z & = 2 \end{array}\right.$$

Pas de $0 = b$ et une inconnue auxiliaire z, donc une infinité de solutions.
On pose $z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \boxed{2}x & -y & -\lambda & = 0 \\ & \boxed{5}y & +9\lambda & = 2 \\ & & z & = \lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} \boxed{2}x & -y & -\lambda & = 0 \\ & y & & = -\frac{9}{5}\lambda + \frac{2}{5} \\ & & z & = \lambda \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{2}{5}\lambda + \frac{1}{5} \\ y & = & -\frac{9}{5}\lambda + \frac{2}{5} \\ z & = & \lambda, \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}\lambda + \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5}\lambda + \frac{2}{5} \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solution est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque : système de Cramer :

- n équations
- n inconnues
- rang n
- une unique solution

Système de Cramer 2×2

$$(S) \begin{cases} ax + by = \alpha \\ a'x + b'y = \beta \end{cases}$$

Si

$$\det = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

alors

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ a' & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

Exercice

Déterminer les nombres réels p tels que le système $(S) \begin{cases} x + py = \alpha \\ px + y = \beta \end{cases}$ admet une unique solution. Déterminer alors celle-ci grâce aux formules de Cramer.

inverse d'une matrice avec un système

A matrice carrée. On pose $\vec{b}$ une colonne de lettres, et $\vec{x}$ une colonne d'inconnue, et le système

$$(S) : \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

Si le système a une unique solution :

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

alors A est inversible et peut trouver A^{-1} en examinant $\vec{x}$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (S) \left\{ \begin{array}{llll} 2x & +3y & +z & = a \\ 3x & +4y & +z & = b \\ 2x & +3y & -z & = c \end{array} \right.$$

Après calcul, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}a & +3b & -\frac{1}{2}c \\ \frac{5}{2}a & -2b & +\frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}a & & -\frac{1}{2}c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Mais en utilisant une version du pivot de Gauss spécifique aux calculs d'inverse, on a un autre moyen d'inverser la matrice sans avoir à faire un système.

Plan

1 Analyser et résoudre un système

2 Pivot de Gauss total

Opération élémentaire sur les lignes d'une matrice

- $L_i \longleftarrow \alpha L_i + \lambda L_j$ avec $\alpha \neq 0$
- $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$
- $L_i \longleftrightarrow L_j$ (échange de deux lignes)

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 : A_1 = \begin{pmatrix} (1+2\times 6) & (3+2\times(-1)) & (0+2\times(-2)) \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \to \frac{1}{2} L_2 : \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 : \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot total

La méthode du pivot total consiste à transformer la matrice de départ en une matrice diagonale en faisant disparaître tout les coefficients sauf les pivots.

1. à chaque étape, on choisit (en l'encadrant) un pivot :
   - un pivot ne peut pas être nul,
   - pas plus d'un pivot par ligne et par colonne.

   Une fois le pivot choisi :
   - Aucune modification sur la ligne L qui contient ce pivot.
   - Pour les autres ligne, on retire ou ajoute un multiple de L de manière à faire apparaitre 0 dans la colonne de ce pivot.

Lorsqu'il n'est plus possible de choisir un nouveau pivot, le processus s'arrête.

1. En divisant chaque ligne par le bon nombre, on transforme tous les pivots en 1.
2. Par échange de lignes, on range tous les 1 sur la diagonale, de la forme

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & 0 & \\
& \ddots & & 0 \\
0 & & 1 & \\
& & & \\
& 0 & & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow\ r \\ \\ \updownarrow\ n-r \end{array} \\
\overleftrightarrow{\quad r \quad}\ \overleftrightarrow{\quad p-r \quad} &
\end{array}$$

où r est le nombre de pivot. Le nombre de pivot$=$ le rang de la matrice.

Calcul d'inverse

1. on écrit A et I_n l'une à coté de l'autre (présentation visuelle)
2. on applique la méthode du pivot totale à A. En parallèle, on fait sur I_n les mêmes opérations que sur A.
3. A la fin, A a été transformé en I_n, et la matrice I_n est devenue A^{-1}.

Attention si à la fin du pivot, A n'a pas été transformé en I_n, alors la matrice n'est pas inversible et A^{-1} n'existe pas ! !

Exemple : Inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & \boxed{-1} \\ 2 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & \boxed{-1} \\ 2 & \boxed{1} & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{5} L_3$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & \boxed{-1} \\ 2 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow -L_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice

Inverser la matrice avec la méthode du Pivot de Gauss total

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Notion.

- On place la matrice identité à coté de A, et on lui fait subir toutes les opérations qu'on fait sur A
- On choisit et on encadre un pivot : Non nul, Pas plus d'un pivot par ligne et par colonne. il reste encadré à chaque étape du calcul.
- A l'aide de ce pivot, on élimine TOUT les autres termes dans la colonne du pivot.
- Quand il ne reste que des pivots, on les transforme en 1 par division de ligne, puis on les mets sur la diagonale par échange de ligne.
- Si on obtient l'identité, la matrice est inversible et on a l'inverse à coté.

Application à la résolution de systèmes.

Le système (S) : $A\vec{x} = \vec{b}$ avec A inversible a pour solution

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Remarque : ça ne marche pas si :

- le système n'est pas carré.
- si A n'est pas inversible

Et il en reste quoi ?

1. Pour résoudre un système, il vaut mieux utiliser le Pivot de Gauss partiel ou total ? Et pour inverser une matrice ?
2. Si je choisis un pivot ligne 2 et colonne 3, à quoi dois-je faire attention ?
3. Dans la réduite de Gauss d'un système, une ligne sans pivot est appelée une ligne .....(?)......
4. Dans la réduite de Gauss d'un système, une variable qui a un pivot dans une des lignes est une variable .....(?)......
5. Dans la réduite de Gauss d'un système, si une variable n'a pas de pivot, combien a-t-on de solutions ?
6. Lors du calcul de l'inverse d'une matrice, à la fin de la méthode du pivot total, on obtient une diagonale de 1 avec un 0 en fin de diagonale. Que peut-on dire ?

Réponses

1. Pour résoudre un système, Pivot de Gauss partiel. Et pour inverser une matrice, Pivot de Gauss total.
2. Si je choisis un pivot ligne 2 et colonne 3, il ne doit pas déjà avoir de pivot ni dans la ligne 2 et ni dans la colonne 3. Et le coefficient doit être non nul.
3. Dans la réduite de Gauss d'un système, une ligne sans pivot est appelée une ligne auxiliaire ou secondaire.
4. Dans la réduite de Gauss d'un système, une variable qui a un pivot dans une des lignes est une variable principale.
5. Dans la réduite de Gauss d'un système, si une variable n'a pas de pivot, on a une infinité de solution.
6. La matrice n'est pas inversible.