Systèmes d'équations linéaires et Matrices

Plan

1 Système d'équations linéaires

2 Matrices

Définition

Une équation linéaire est

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

Lorsque le nombre d'inconnues est petit, on utilise souvent x, y, z, t comme inconnues :

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = b$$

Exemples :

- $3x + 2y + z = 5$
- $2x = 1 + 2z$
- $x^2 + y = 2$

Applications. géométrie (intersection de plans, droites...), algèbre linéaire (recherche de noyau, d'image d'une application), calcul matriciel (inverse d'une matrice...).

Définition

Résoudre le système de n équations linéaires à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\ldots & +a_{1,p}x_p & =b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\ldots & +a_{2,p}x_p & =b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\ldots & +a_{n,p}x_p & =b_n \end{array}\right. ,$$

c'est trouver tous les $(x_1, \ldots, x_p)$ solutions du système (vérifiant toutes les équations).

---

un système est compatible si il y a au moins une solution. Sinon incompatible ou impossible.

Lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, le système est homogène.

Exemples :

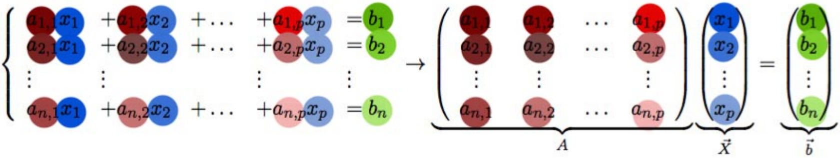
1. Un système homogène à n inconnues a toujours au moins une solution : $(0, 0, \ldots, 0)$.
2. $$\begin{cases} x & +y & = 3 \\ x & -z & = 1 \end{cases}$$

   (0,3,-1) est une solution du système
   (1,2,0) est aussi une solution
   Mais ce qu'on veut, c'est toutes les solutions.

Ecriture Matricielle

Mise en forme du système :

1. toutes les inconnues à gauche du signe $=$
2. Les constantes seules à droite du $=$.
3. aligner en "colonnes" les inconnue (une inconnue $=$une colonne)



$$\boxed{A\vec{X} = \vec{b}}$$

A matrice des coefficients, $\vec{X}$ vecteur colonne des inconnues et $\vec{b}$ est le vecteur colonne des constantes.

Exercice

Ecrire le système suivant sous forme matricielle.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Plan

1 Système d'équations linéaires

2 Matrices

Définition

Une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un tableau rectangulaire de réels délimité par des parenthèses.

Une matrice à n lignes et p colonnes est une matrice $\boldsymbol{n \times p}$:

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ = l'ensemble des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ = ensemble des matrices $n \times n$ (carrées).

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 23 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

- Matrice nulle = tous ses coefficients sont nuls.

$$0_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- une matrice $n \times 1$ est une matrice colonne (vecteur colonne).

Dans les matrices carrées :

- la diagonale = la diagonale qui va du haut gauche au bas droite.
- La matrice identité I_d ou I_n a des 1 sur la diagonales et des 0 partout ailleurs.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Une matrice triangulaire supérieure : tous les termes en-dessous de la diagonale sont nuls.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Une matrice diagonale : les termes sont sur la diagonales, 0 partout ailleurs.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Définition

A et B matrices de même taille

$$\boxed{A + B}$$

on additionne chaque terme de A au terme correspondant de B.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 23 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+5 & -2+10 \\ -2+12 & 1+23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 10 & 24 \end{pmatrix}$$

L'élément neutre de l'addition est la matrice nulle 0 :

$$A + 0 = A, \qquad 0 + A = A$$

Définition

A une matrice et λ un scalaire.

$$\boxed{\lambda A}$$

on multiplie chaque terme de A par λ.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 23 \end{pmatrix},$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \times 5 & 2 \times -2 \\ 2 \times -2 & 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-B = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -12 & -23 \end{pmatrix}$$

Exercice

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer

$$A + B, \quad A - B, \quad 3A, \quad 4B, \quad 3A - 4B$$

Notions.

- la matrice λA est la matrice obtenue en multipliant chaque terme de A par λ.
- la matrice $A + B$ s'obtient en additionnant chaque terme de A au terme correspondant de B.

Ligne × colonne

L $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ de $\boxed{\text{même taille}}$

$$L \times C = \begin{matrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} & \end{matrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Exemple :

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \end{matrix} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Le produit $\boxed{A \times B = AB}$ est une matrice qu'on obtient en multipliant les lignes de A et les colonnes de B, à condition que les tailles correspondent !

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,k} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,k} & \cdots & b_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,k} & \cdots & b_{m,q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & \boxed{c_{i,k}} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 23 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 23 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \times 5 + -2 \times 12 & 5 \times 10 + -2 \times 23 \\ -2 \times 5 + 1 \times 12 & -2 \times 10 + 1 \times 23 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice

Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

A, B, C des matrices (taille adaptée).

1. associatif :
$$(AB)C = A(BC) = ABC$$
2. distributif :
$$A(B+C) = AB + AC, \qquad (A+B)C = AC + BC$$
3. avec les constantes
$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$
4. pas commutatif :
$$A \times B \neq B \times A$$
5. L'élément neutre $=$ matrice identité :
$$A \times I_n = A \qquad I_n \times A = A$$
6. Si A est une matrice carrée,
$$A^0 = I_n, \qquad A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemple : Non commutativité :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dans l'autre sens :

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 14 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : On peut avoir $AB = 0$ sans que ni A ni B ne soit la matrice nulle !

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversion

La division n'existe pas dans les matrices.

Définition

A une matrice carrée de taille n.
On dit que A est inversible si A possède un inverse A^{-1}, tel que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

L'ensemble des matrices inversibles de taille n est $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : Les matrices carrées n'ont pas toujours un inverse.
$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ n'a pas d'inverse. Les matrices non carrées n'ont jamais d'inverse.

Propriété.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = I_n$$

alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Exercice

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Calculer AB. La matrice A est-elle inversible ? Donner A^{-1}.

Propriété.

A, B matrices de même taille inversibles, λ constante **non nulle**.

1. L'identité I_n est inversible ${I_n}^{-1} = I_n$
2. A^{-1} est inversible : $(A^{-1})^{-1} = A$
3. AB est inversible :
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
4. λA est inversible
$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$$
5. A^nest inversible :
$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n = A^{-n}$$

Démonstration. Montrons que AB est inversible ; On a

$$(AB) \times (B^{-1}A^{-1}) = A(B(B^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

donc AB est inversible et son inverse est

$$B^{-1}A^{-1}$$

.

Lien avec les systèmes.

S un système linéaire d'écriture matricielle

$$A\vec{X} = \vec{b}$$

Si A est une matrice carrée inversible, alors A^{-1} existe.

On multiplie le système par la matrice A^{-1} de chaque coté, à gauche :

$$A^{-1}A\vec{X} = A^{-1}\vec{b} \quad \Leftrightarrow \vec{X} = A^{-1}\vec{b}$$

Donc la solution du système est $A^{-1}\vec{b}$.

Transposition

Définition

$A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. La transposée de A est ${}^tA \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$:

- Les lignes de ${}^tA$ sont donc les colonnes de A et vice versa.
- On a fait une symétrie par rapport à la diagonale.

Exemple :

- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -6 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \pi \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$
- ${}^tI_n = I_n$.
- toute matrice diagonale est égale à sa transposée.
- La transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne et vice-versa.

Exercice

Calculer la transposée des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 23 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Notion. Les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A et vice versa. On a fait une symétrie par rapport à la diagonale (celle qui part du coin haut gauche !).

Propriété.

$$^t(^tA) = A$$

$$^t(\lambda A + B) = \lambda\, ^tA + {^tB}$$

$$^t(AB) = {^tB}\, ^tA$$

$$(^tA)^{-1} = {^t(A^{-1})}$$

Définition

Une matrice carrée A est symétrique lorsque

$$ {}^{t}A = A $$

les coefficients de la matrice sont symétriques par rapport à la diagonale.

Une matrice carrée A est antisymétrique lorsque

$$ {}^{t}A = -A $$

les coefficients de la matrice sont symétriques mais de signes opposés par rapport à la diagonale (qui est nulle).

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 12 & -\mathrm{e} \\ -12 & 0 & -i \\ \mathrm{e} & i & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Le produit de deux matrices symétriques peut ne pas être symétrique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et il en reste quoi ?

1. Pourquoi le système
$$\begin{cases} -3x & +y & = & 2 \\ 4x & +3\ln y & = & -4 \end{cases}$$
n'est-il pas linéaire ?
2. Le système
$$\begin{cases} 2x & -y & = & 7 \\ 8x & +3y & = & 4 \end{cases}$$
a quelle matrice des coefficients et vecteur des constantes ?
3. La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a quelle particularité ?
4. Parmi les opérations de matrice suivantes, lesquelles se font coefficient par coefficient et lesquelles se font avec des lignes et colonnes ?
$$A+B, \quad A-B, \quad A\times B, \quad 5A, \quad A\div B$$
5. Si on a une matrice B telle que $AB = I_n$, alors on dit que B est ....(?)..... de A.

Réponse

1. le système n'est pas linéaire à cause de $\ln y$ dans la deuxième ligne.
2. $$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$
3. La matrice est carrée et diagonale.
4. $A + B$, $A - B$ et $5A$ se font coefficient par coefficient.
   $A \times B$ se fait avec des lignes et colonnes.
   $A \div B$ n'est pas une opération possible dans les matrices
5. Si on a une matrice B telle que $AB = I_n$, alors on dit que B est l'inverse de A.