Fonctions de base

(3)

Plan

On s'intéresse aux fonctions de la forme

$$x \to x^a$$

avec a un réel fixé.

Puissances simples

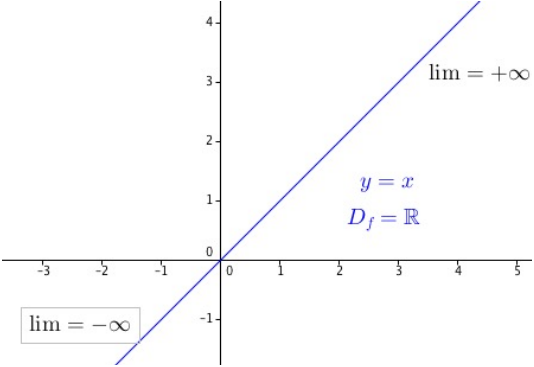
Si $a = 0.$ $x \to x^0$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est constante égale à 1.

Si $a = n$ (entier strictement positif),

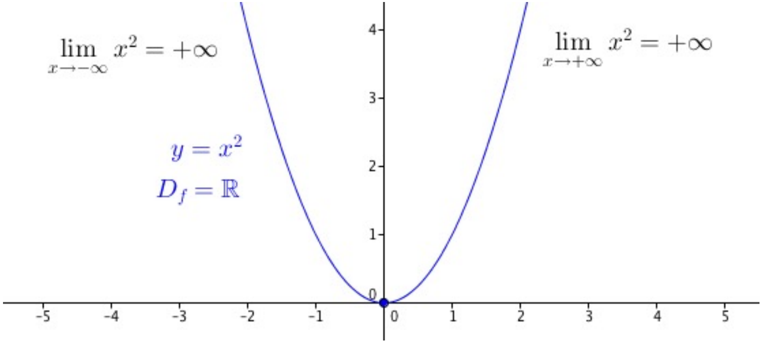
$$x^n = \underbrace{x.x.x.\dots.x}_{n \text{ fois}}$$

définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Son sens de variation dépend de n.

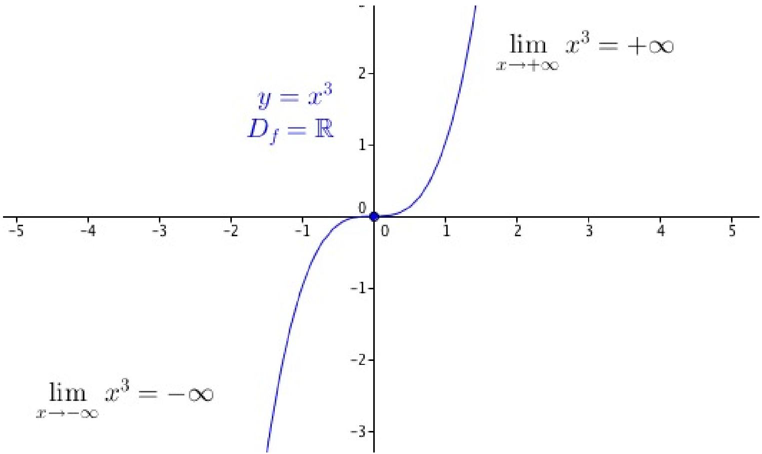
$x \to x^1$



$x \to x^2$


$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
$y = x^2$
$D_f = \mathbb{R}$
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

$x \to x^3$



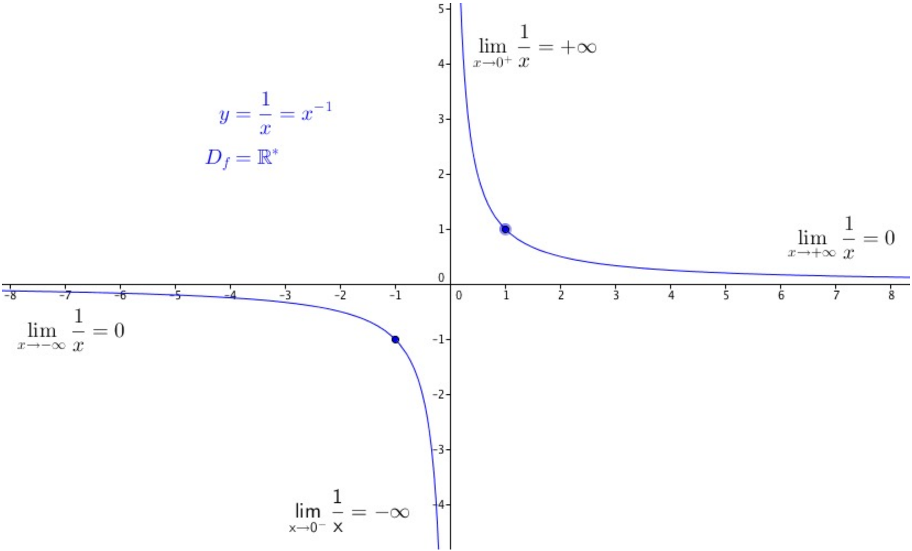
$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
$y = x^3$
$D_f = \mathbb{R}$
$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
-1
-2
-3

$\boxed{\text{Si } a = -n}$ (entier strictement négatif),

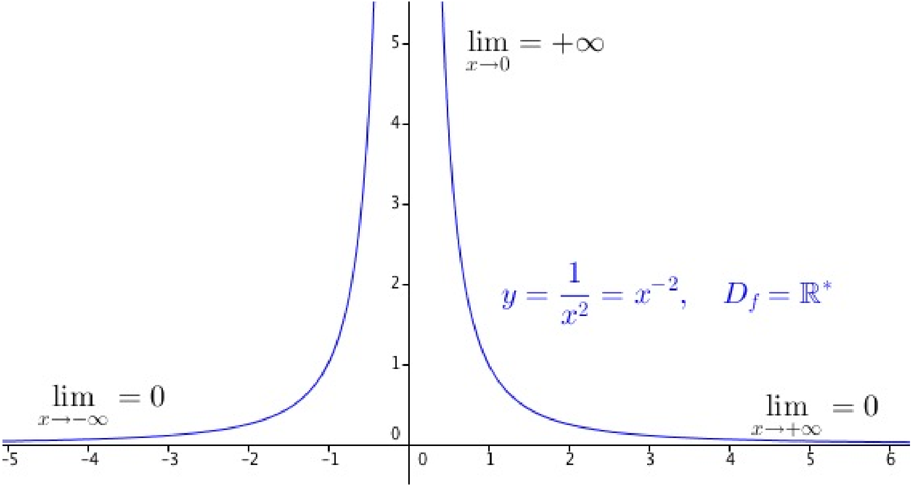
$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x.x.x.\ldots.x}$$

La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Son sens de variation dépend de n.

$$x \to x^{-1} = \frac{1}{x}$$



$$x \to x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$



Si $a = \frac{1}{n}$ avec n un entier strictement positif.

$x^{\frac{1}{n}}$ s'appelle la racine n-ième de x :

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

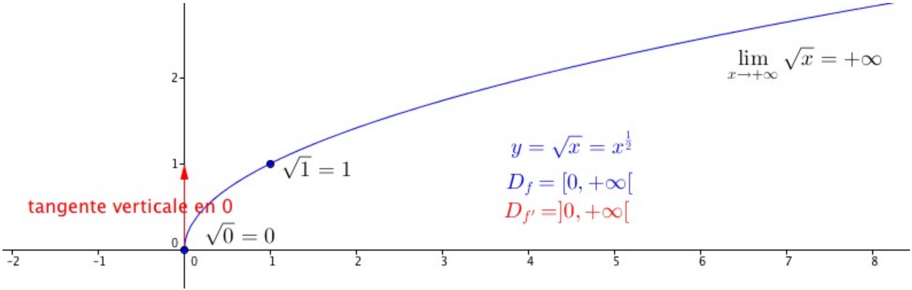
Sur son domaine de définition :

$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$

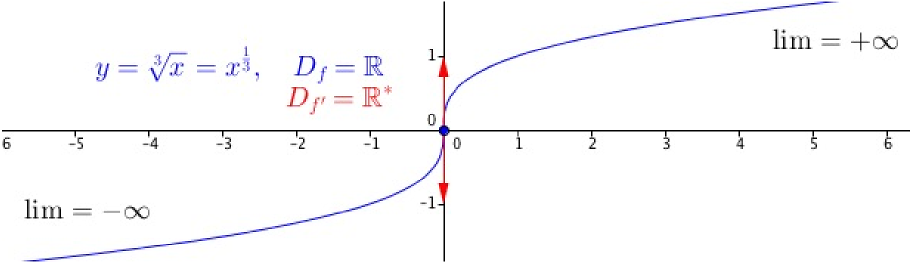
Par exemple, $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$ et $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$.

Si n est pair : l'ensemble de définition de $x^{\frac{1}{n}}$ est $\mathbb{R}^+$ et son ensemble de dérivation est $\mathbb{R}^{+*}$.

Exemple : $x \to \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$



Si n est impair : l'ensemble de définition de $x^{\frac{1}{n}}$ est $\mathbb{R}$ et son ensemble de dérivation est $\mathbb{R}^*$.
Exemple : racine cubique $x \to \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$



Exercice

Déterminer $\sqrt{81}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-216}$ et $\sqrt[4]{16}$.

Notions.

- $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- La racine n-ième de x a pour propriété $(\sqrt[n]{x})^n = x$, c'est à dire que $\sqrt[n]{x}$ est le nombre qui, élevé à la puissance n, redonne x.

Autres puissances

Définition

Si a n'est pas un entier ou une fraction d'entier

$$x^a = e^{a\ln(x)} \qquad \forall x \in]0,+\infty[$$

La fonction est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

Propriété.

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f_a'(x) = ax^{a-1}.$$

Pour tout $x \in]0,+\infty[$:

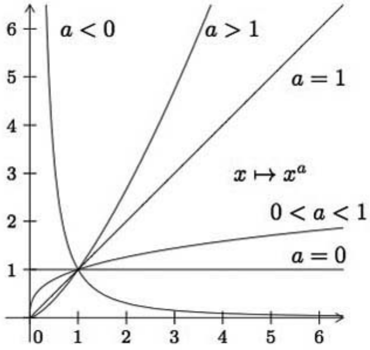
$$x^a = \exp(a\ln(x)), \qquad \ln(x^a) = a\ln(x)$$

1. Si $a < 0$, x^a est strictement décroissante.

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a = 0^+$$

2. Si $a > 0$, x^a est strictement croissante.

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = 0^+, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$$



Croissances comparées

Lorsque qu'on calcule une limite et qu'on obtient une forme indéterminée (en général $\frac{\infty}{\infty}$ ou $0 \times \infty$), les croissances comparée permettent de dire quelle fonction « l'emporte » sur quelle autre.

Propriété.

En $+\infty$:
Le logarithme népérien est négligeable devant les fonctions puissances d'exposant strictement positif.

$$\forall a \in \mathbb{R}, b > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^a}{x^b} = 0$$

Propriété.

Les fonctions puissances sont négligeables par rapport à la fonction exponentielle :

$$\forall a > 0, b \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\, e^{-x} = 0$$

Propriété.

En 0^+, Le ln est moins fort que les fonctions puissances d'exposant strictement positif.

$$\forall a \in \mathbb{R}, b > 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x^b \ln(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^b \left| \ln(x) \right|^a = 0$$

Propriété.

En $-\infty$, les puissances sont moins fortes que les exponentielles :

$$\forall a > 0, b > 0, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^b \, \mathrm{e}^x = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} x \, \mathrm{e}^x = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^b \, \mathrm{e}^{ax} = 0$$

Plan

Propriété.

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad \text{et} \qquad \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1].$$

sinus et cosinus sont $\mathbf{2}\pi-$périodiques

$$\begin{array}{rccc} \tan : & \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}. \end{array}$$

La tangente est $\pi-$ périodique.

Propriété.

- cosinus est paire :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

- sinus et tangente sont impaires

$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \tan(-x) = -\tan(x)$$

Propriété.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

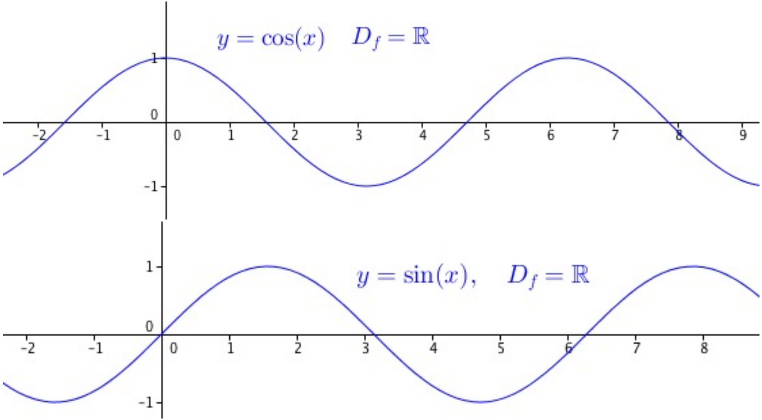
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

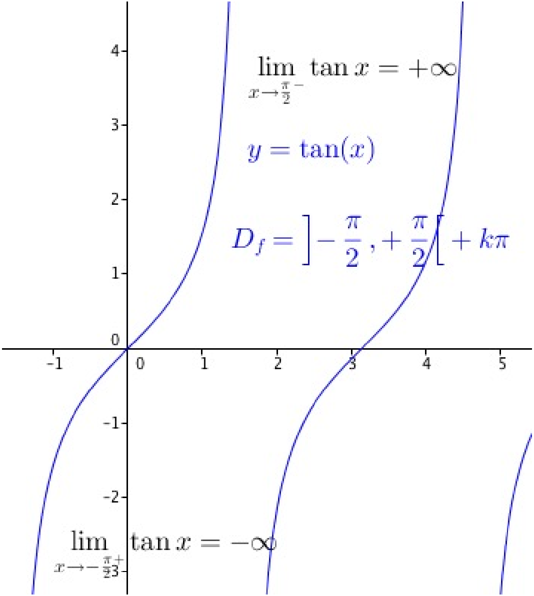
Derivées :

$$\cos' = -\sin \qquad \text{et} \qquad \sin' = \cos\,.$$

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$


$y = \cos(x) \quad D_f = \mathbb{R}$
$y = \sin(x), \quad D_f = \mathbb{R}$


$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$
$y = \tan(x)$
$D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[+ k\pi$
$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Exercice

On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x + 5)$. Pour tout x réel, simplifier $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$. Que peut-on en déduire sur f ?

Notions.

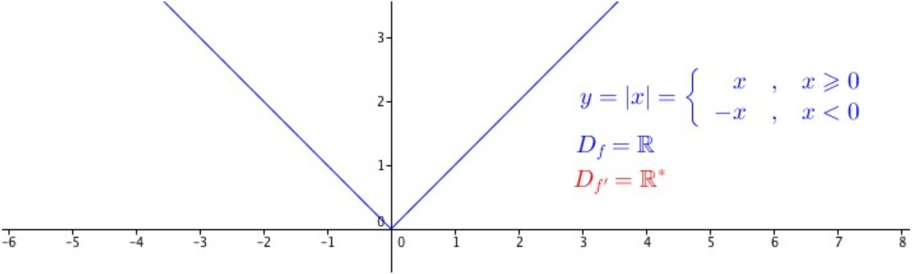
- sin est $2\pi-$périodique, c'est-à-dire que $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- Une fonction est $T-$ périodique si $f(x + T) = f(x)$.

Plan

Définition

La valeur absolue de x est

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$



Propriété.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

1. $|x| \geqslant 0$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|xy| = |x|\,|y|$
4. Inégalité triangulaire :

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Résolution d'équation Soit α un réel positif fixé. Soit x réel.

- $|x| = \alpha \iff x = \alpha \text{ ou } x = -\alpha$
- $|x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$,
- $|x| \geqslant \alpha \iff x \geqslant \alpha \text{ ou } x \leqslant -\alpha$.

Remarque : Attention aux équations avec x^2, ça peut cacher une valeur absolue car $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$.

Exercice

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$|x-2| = 5$$

Et il en reste quoi ?

1. Entre x^4, $\ln x$ et e^x, qui l'emporte sur qui en $+\infty$?
2. La fonction sin est-elle paire ou impaire ?
3. Donner les solutions de l'équation $|x| \leqslant a$ avec a positif.

Réponses

1. e^x l'emporte sur x^4 qui l'emporte sur $\ln x$
2. La fonction sin est impaire
3. l'équation $|x| \leqslant a$ donne $-a \leqslant x \leqslant a$ donc les solutions sont $[-a, a]$.