Fonctions de base

(2)

Plan

Définition

fonction affine

$$f(x) = ax + b$$

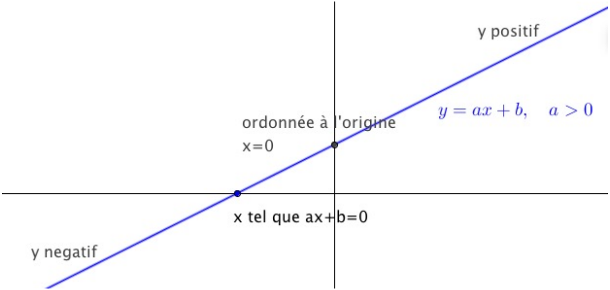
- La courbe $y = ax + b$ est une droite.
- a est la pente de la droite ou son coefficient directeur.
- b est l'ordonnée à l'origine

Tracer Choisir deux valeurs de x, calculer les y correspondant. Ca fait deux points et on trace la droite passant par les deux points.

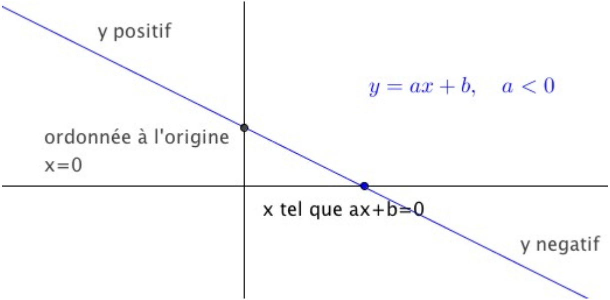
Signe et sens de variation

- Si $a = 0$, la droite est horizontale, la fonction est constante et donc de signe constant.
- Sinon, on résout $\boxed{ax + b = 0}$ pour trouver le point d'annulation de la fonction.

Si $a > 0$, la droite « monte » (croissante), donc $ax + b$ est négatif avant le point d'annulation et positif après.



Si $a < 0$, la droite « descend » (décroissante), donc $ax + b$ est positif avant le point d'annulation et négatif après.



Exercice

Une fonction affine vérifie $f(3) = -1$ et $f(-2) = 1$.

1. Trouver l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Quel est le sens de variation de f ?
3. Donner son tableau de signe.
4. Tracer la courbe de f.

Notions.

- Une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$.
- elle est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$.
- Pour l'étude du signe, on résout $f(x) = 0$ pour commencer. Ensuite on place $+$ et $-$ en fonction du sens de variation de f.
- Une fonction affine est représentée par une droite. Il faut les coordonnées de 2 points de la courbe pour la tracer.

Plan

Définition

Trinôme du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad (a \neq 0)$$

Courbe Parabole

- Si a positif, la parabole est tournée vers le haut
- Si a négatif, la parabole est tournée vers le bas.

Racines

Déterminer les racines du trinôme = Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$

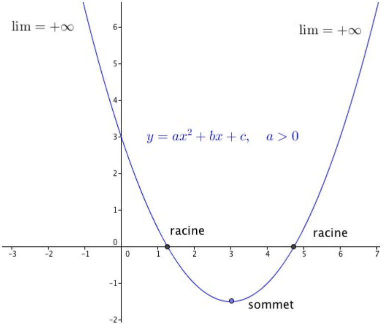
Le discriminant

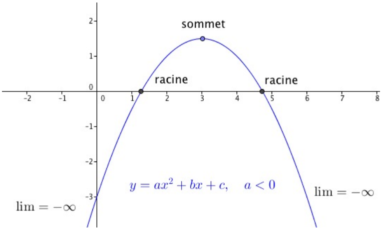
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$, deux racines

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe contraire entre les deux.





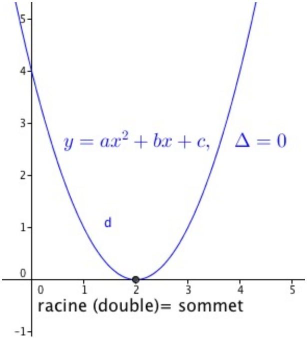
Factorisation

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si $\Delta = 0$, une seule racine

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

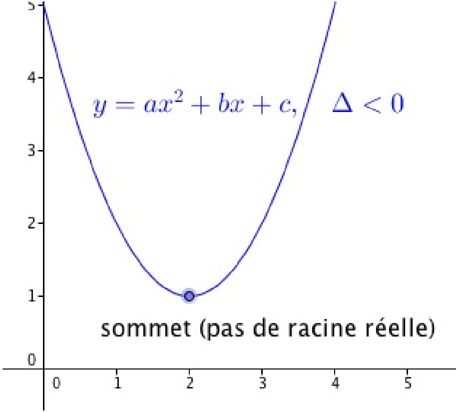
Le trinôme est alors du signe de a tout le temps, et il vaut 0 à la racine.



Factorisation

$$a(x - x_1)^2$$

Si $\Delta < 0$, pas de racines réelles, le trinôme ne vaut jamais 0. Il est du signe de a tout le temps.



La forme canonique.

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

(α, β) est le sommet de la parabole.

Exercice

Soit le trinôme du second degré $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$. Calculer les racines de f et en déduire son sommet. Tracer l'allure de la courbe représentative de f et mettre f sous forme canonique.

Notions.

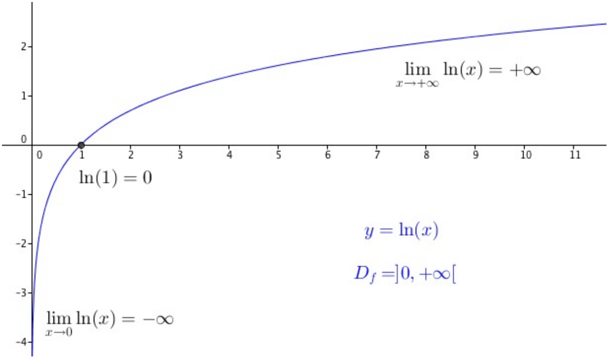
- $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Ce sont les deux points où f vaut 0.
- Le sommet est au milieu des racines (s'il y en a).
- Si le coefficient de x^2 est positif, la parabole est tournée vers le haut. Si négatif, vers le bas.
- la forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + f(\alpha)$ avec α est l'abscisse du sommet de la parabole.

Plan

Définition

Le logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse $(\frac{1}{x})$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

$$\begin{array}{rccc} \ln : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$



Propriété.

1. $\ln(1) = 0$.
2. ln est dérivable et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
3. ln est continue et strictement croissante
4. la courbe a une asymptote verticale en x=0.

Propriété.

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y); \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y);$$

$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$$

limites classiques $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x(\ln x)^n = 0$$

Remarque : Aucune formule pour

$$\ln(x \pm y), \quad \ln(x)\ln(y), \quad \frac{\ln x}{\ln y}$$

Exercice

Sans calculatrice, comparer les réels x et y suivants :

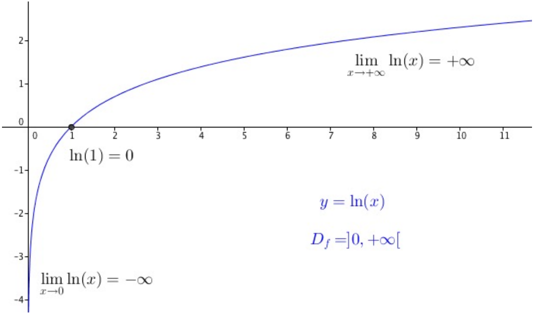
$$a) x = \ln 8, \quad y = 4\ln 2, \qquad b) x = \ln 5, \quad y = \ln 2 + \ln 3,$$

$$c) x = \ln \frac{1}{9}, \quad y = -2\ln 3$$

Notions.

- Comparer signifie trouver quel est le plus petit nombre et le plus grand nombre.
- ln est une fonction strictement croissante : si $a < b$ alors $\ln a < \ln b$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$, $\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$.

Tout nombre réel admet un unique antécédent par ln dans $]0,+\infty[$. ln est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.



L'unique antécédent de 1 par ln est e (nombre de Néper).

$$\ln e = 1, \qquad e \approx 2,72$$

L'exponentielle

Définition

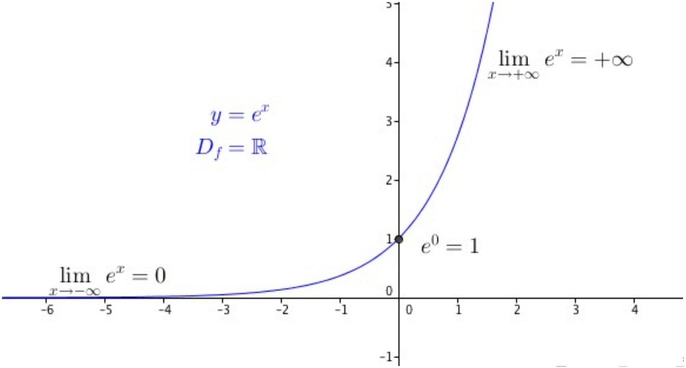
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ (exponentielle de x) est l'unique antécédent de x par la fonction ln. La fonction exponentielle est

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ & x & \mapsto & \exp(x) = e^x \end{array}$$

Remarque : exp est la bijection réciproque de ln. Son graphe est le symétrique de celui du ln par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriété.

1. $\exp(1) = e^1 = \mathrm{e}$ et $\exp(0) = e^0 = 1$.
2. exp est dérivable et $(e^x)' = e^x$.
3. exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. exp a une asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$.



Propriété.

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}; \quad e^{x+y} = e^x e^y; \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}; \qquad e^{xy} = (e^x)^y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln\left(e^x\right) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad e^{\ln(x)} = x$$

limite classique :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Remarque : aucune formule pour $e^x + e^y$.

Exercice

Simplifier les expressions suivantes

$$a = e^{\ln 5} + e^{-\ln 3}, \quad b = e^{\frac{1}{2}\ln 4} \times e^{-\ln\frac{1}{2}}, \quad c = \frac{e^{3+\ln 5}}{e^{4+\ln 4}},$$

$$d = e^{x}e^{-2x}, \quad f = (e^{x})^{3}(e^{-x})^{2}, \quad g = \frac{e^{4x}}{e}$$

Logarithmes et exponentielles de base quelconque

Définition

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. Le logarithme de base a est

$$\begin{array}{rccl} \log_a : &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}. \end{array}$$

Remarque : La fonction $\log_a$ est la fonction proportionnelle à ln qui vaut 1 en a.

- Si $a = 10$: *logarithme décimal* log (pH en chimie).
- Le logarithme népérien est le logarithme de base e.

Propriété.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a\left(x^n\right) = n \log_a(x)$$

Propriété.

$$\log_a(1) = 0, \qquad \log_a(a) = 1$$

La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

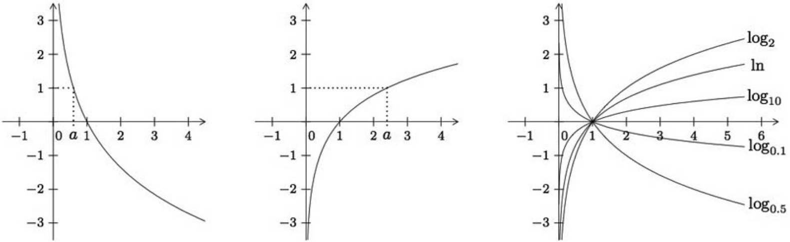
$$\log_a'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

- Si $0 < a < 1$, $\log_a$ est strictement décroissante ;

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$$

- Si $a > 1$, $\log_a$ est strictement croissante,

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$$



Définition

Soit $a > 0$. L'exponentielle de base a est

$$\begin{array}{rccl} \exp_a : & \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ & x & \mapsto & a^x = \exp\left(x\ln(a)\right) \end{array}$$

Si $a \neq 1$, la fonction $\exp_a$ est la bijection réciproque de $\log_a$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a\left(\exp_a(x)\right) = x$$

et

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \exp_a\left(\log_a(x)\right) = x.$$

Définition

Soit $a > 0$:

$$\boxed{a^x} = \exp\left(x \ln(a)\right)$$

Remarque : a^x (le x est en exposant) n'est pas une puissance : c'est une exponentielle. C'est comme e^x !

Attention Seul un nombre réel strictement positif peut être élevé à une puissance quelconque.

Exemple : $2^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\ln(2))$ existe, mais pas $(-2)^{\sqrt{2}}$

Propriété.

$a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

Propriété.

$x \to a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$x \to a^x \ln(a)$$

Propriété.

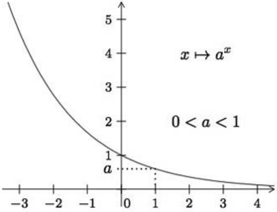
- Si $0 < a < 1$, $x \to a^x$ est strictement décroissante

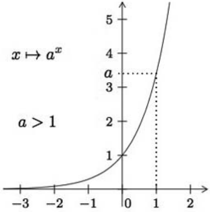
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

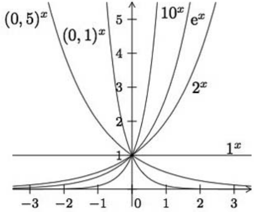
- Si $a > 1$, $x \to a^x$ est strictement croissante

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

- $x \to 1^x$ est la fonction constante égale à 1.







Toujours y penser :

$$u(x)^{v(x)} = \exp\left(v(x)\ln\left(u(x)\right)\right)$$

$$\boxed{u(x)}^{\boxed{v(x)}} = e^{\boxed{v(x)}\times\ln\boxed{\left(u(x)\right)}}$$

Exercice

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$2^{x^3} = 3^{x^2}$$

Notion. $a^x = \exp\left(x \ln(a)\right)$.

Et il en reste quoi ?

1. Donner le sens de variation de $x \to 3x - 3$
2. Quelles sont les racines de $ax^2 + bx + c$?
3. $\ln(xy) = \cdots$?
4. $e^{x+y} = \cdots$?

Réponses

1. le sens de variation de $x \rightarrow 3x - 3$ est croissante strictement
2. les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ sont $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
3. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
4. $e^{x+y} = e^x \times e^y$