Fonctions de base
(1)

Plan

Définition

Une fonction f est

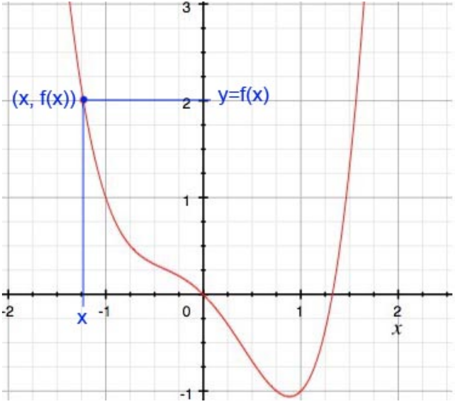
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

- E ensemble de départ ;
- F ensemble d'arrivée ;
- $f(x)$ image de x par f ;
- x est <u>un</u> antécédent de y si $f(x) = y$.

Remarque : Chercher l'ensemble de définition d'une fonction, c'est trouver l'ensemble de départ le plus grand possible.

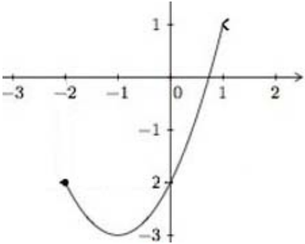
Graphique. Tracer la courbe ou le graphe de f signifie tracer dans un repère les points de coordonnées $(x, f(x))$, avec $x \in E$.

- Sur l'axe des abscisses (axe horizontal, axe des x) : les antécédents et l'ensemble de départ.
- Sur l'axe des ordonnées (axe vertical, axe des y) : les images et l'ensemble d'arrivée.



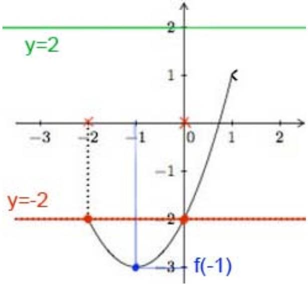
Exemple :

$$f: \begin{array}{rcl} [-2;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+2x-2 \end{array}$$



$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 2 = -2,$ $\qquad f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 2 = -3,$

Mais $f(1)$, $f(2)$, $f(-3) \to$ NON !



$f(-1) = -3$ $\qquad$ l'image de -1 par f est -3.
$f(-2) = -2$ et $f(0) = -2$ $\qquad$ 0 et -2 sont des antécédents de -2 par f.
2 n'a pas d'antécédent par f.

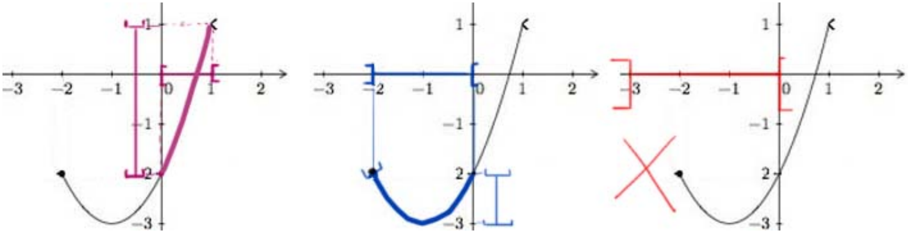
Définition

D une partie de E.

L'image de D par f est

$$f(D) = \{y \in F \mid \exists x \in D, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

Exemple :

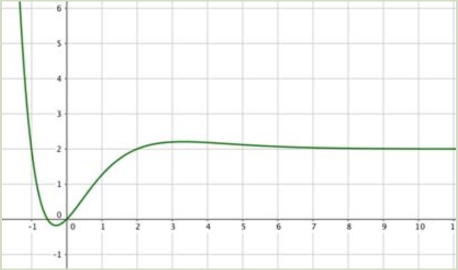


- $f([0,1[) = [-2,1[$.
- $f(]-2,0[) = [-3,-2[$.
- Parler de l'image de l'intervalle $]-3,0[$ par f n'a pas de sens !

Exercice

A l'aide de la courbe de la fonction f répondre aux questions suivantes :

1. Quel est l'image de -1 par f ?
2. Quels sont les antécédents de 2 par f sur $[-2, 4]$?
3. Quel est l'ensemble image de $[0, 8]$ par f ? Et celui de $]-\infty, -1]$? et celui de $[-1, 2]$?
4. Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

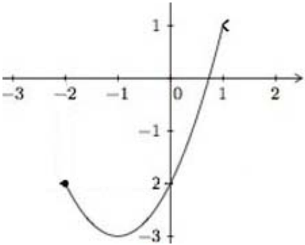


Définition

$f : E \to F$. L'ensemble image de f est

$$\boxed{\mathrm{Im}(f)} = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Exemple :



$$f([-2;1[) = [-3;1[$$

Attention rédaction !

$$f \neq f(x)$$

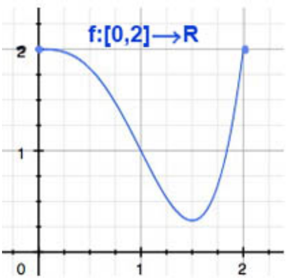
- f : la fonction complète. propriétés globales (définie sur E, à valeur dans F, continue, dérivable, croissante, décroissante, elle s'annule en 1......)
  - soit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F. \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.
  - soit f la fonction définie sur E par $\forall x \in E, \quad f(x) = \ldots .$
- $f(x)$: un nombre, à condition d'avoir introduit $x \in E$. propriété ponctuelle
  - $f(x)$ est un nombre positif / négatif, $f(x) = 0$
  - $f(x)$ est plus grand que 2, plus petit que 5....

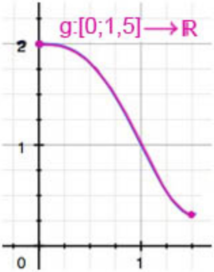
Définition

A, B ensembles tels que $A \subset B$. f une fonction définie sur B.

- g définie sur A est une restriction de f (aussi notée $f_{|A}$) :

$$\forall x \in A, \quad g(x) = f(x).$$



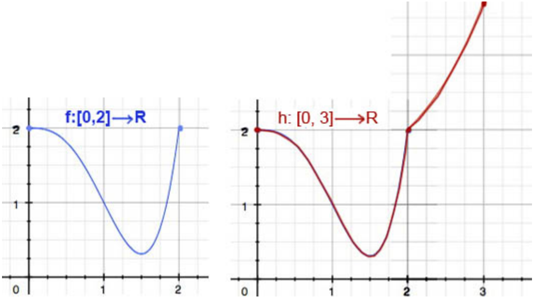


Définition

B et C ensembles tels que $B \subset C$. f une fonction définie sur B.

- h définie sur C est un prolongement de f :

$$\forall x \in B, \quad h(x) = f(x).$$



Composition des applications

Définition

$f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.
La composée de g par f est $g \circ f$ (g rond f)

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g \circ f(x) = g\big(f(x)\big). \end{array}$$

Exemple : h définie sur $]2, +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x-2}$:

$$h(x) = \sqrt{x-2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

avec $f : x \to x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \to \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple : La fonction f définie sur $]2,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$$

est la composée de trois fonctions.
$g : x \to x-2$ définie sur $\mathbb{R}$, $h : x \to \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$, $k : x \to \frac{3}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

$$f(x) = k \circ h \circ g(x) = k \circ h(g(x)) = k(h(g(x)))$$
$$= \frac{3}{h(g(x))} = \frac{3}{\sqrt{g(x)}} = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$$

Remarque : Attention à l'ordre des fonctions ! Attention aux ensemble de définitions !

Définition

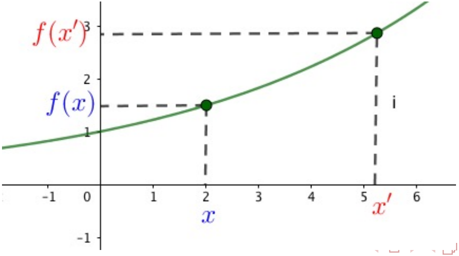
f une fonction définie sur E.

- f est constante sur E : $\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x')$.
- f est croissante sur E :

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x').$$

- f est strictement croissante sur E

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad x < x' \Rightarrow f(x) < f(x').$$



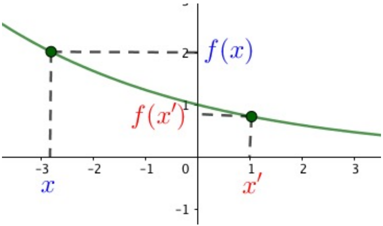
Définition

- f est décroissante sur E :

$$\forall (x,x') \in E^2, \quad x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x').$$

- f est strictement décroissante sur E :

$$\forall (x,x') \in E^2, \quad x < x' \Rightarrow f(x) > f(x').$$



Exercice

On donne le tableau de variation suivant pour une fonction f. Tracer l'allure possible de la courbe de f.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2

Remarque : Quand on applique une fonction f sur une inégalité :

- Si f est croissante, alors l'inégalité ne change pas.
- Si f est décroissante, alors l'inégalité change de sens.
- Si f n'est ni croissante, ni décroissante, il est interdit de l'appliquer sur l'inégalité.
- Une inégalité stricte ne reste stricte que si la fonction est strictement croissante (ou strictement décroissante)

Exemples :

1. exp et ln sont strictement croissantes sur leurs ensembles de définition.
2. La fonction cube ($x \to x^3$) est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais pas la fonction carrée.
3. La fonction inverse ($x \to \frac{1}{x}$) est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

   Mais la fonction inverse n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$!

Définition

f est majorée :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) \leqslant M \quad (M \text{ est un majorant de } f).$$

f est minorée :

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \quad (m \text{ est un minorant de } f).$$

f est bornée $=$ elle est majorée et minorée :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$$

ou encore

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ |f(x)| \leqslant K$$

Exemple : sin est majorée par 2 et minorée par -3.
$|\arctan x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ pour tout x réel, donc arctangente est bornée.

Tracer sans étude de fonction

f une fonction avec $\mathcal{C}$ son graphe dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

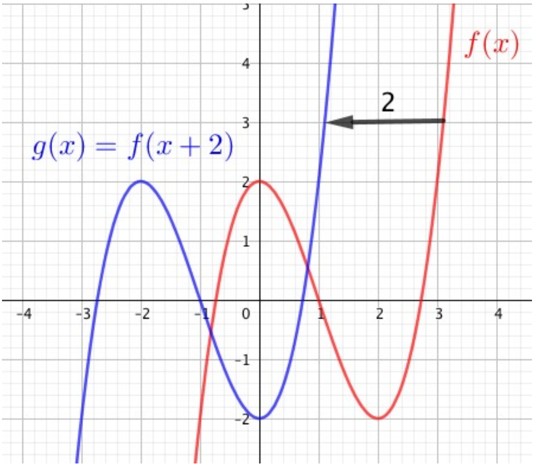
On veut tracer sans étude le graphe de g, fonction « modifée » de f :

1. ajout d'une constante a à x
2. ajout d'un signe - devant x
3. ajout d'un signe $-$ devant f
4. ajout d'une constante b

La courbe de g se déduit graphiquement de celle de f par des transformations (à faire impérativement dans l'ordre donné ici !).

$x \to f(x+a)$: on translate la courbe horizontalement de $-a$.

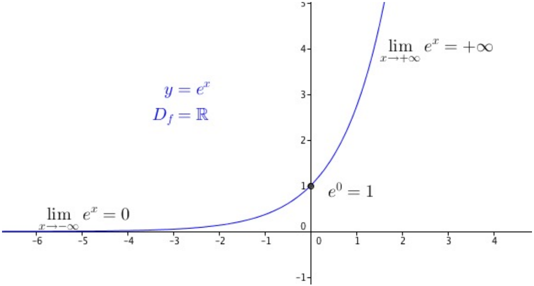
- Si a est positif, décalage vers la gauche.
- Si a est négatif, décalage vers la droite.



Exercice

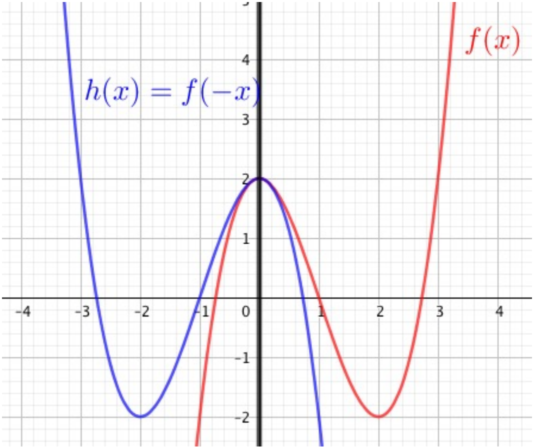
Tracer sans étude le graphe de la fonction $f_1 : x \mapsto \exp(x+1)$.

Notions. Le graphe de l'exponentielle est

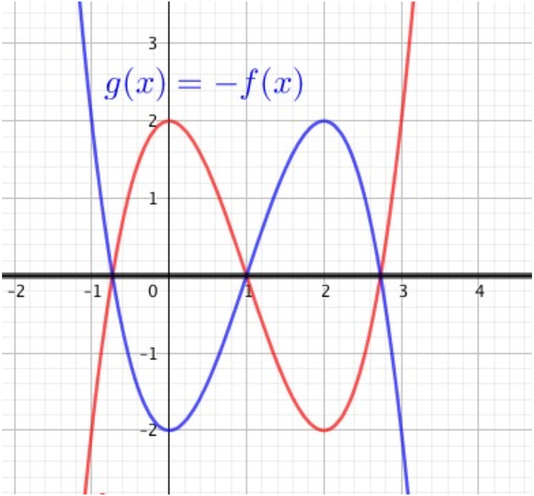


Le graphe de $x \to f(x+a)$: on translate la courbe horizontalement de $-a$.

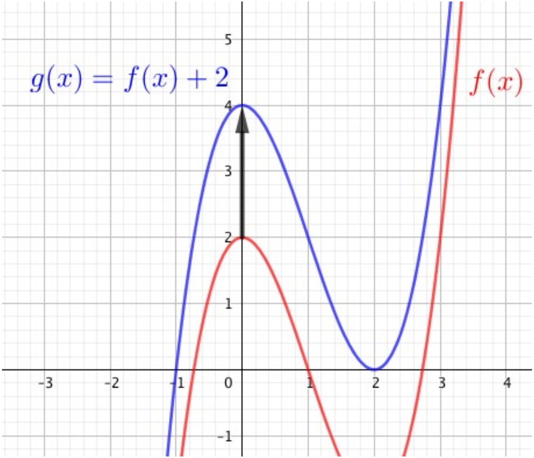
$x \to f(-x)$: on fait la symétrie d'axe vertical (Oy).



$x \to -f(x)$: on fait la symétrie d'axe horizontal (Ox).



$x \to f(x) + b$: on fait la translation de b verticalement.



Et il en reste quoi ?

1. $$f : \begin{array}{ccc} [3,5] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longrightarrow & 3x^2 - 7 \end{array}$$

   donner les éléments suivants :

   1. Ensemble de définition
   2. Ensemble d'arrivée
   3. $f(x) = \cdots$

2. Soit une fonction f telle que $\forall x, x' \in \mathbb{R}, x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')$. Que peut-on dire sur f ?
3. La fonction $\ln(x^2 + 5)$ correspond à une composée $g \circ f(x)$. Donner $f(x)$ et $g(x)$.
4. Comment tracer e^{x-2} à partir de la courbe de e^x ?

Réponses

1. Si

$$f : \begin{array}{rcl} [3,5] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longrightarrow & 3x^2 - 7 \end{array}$$

    1. Ensemble de définition $[3,5]$
    2. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^+$
    3. $f(x) = 3x^2 - 7$

2. Si $\forall x, x' \in \mathbb{R}, x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\ln(x^2 + 5) = g \circ f(x)$ avec $f(x) = x^2 + 5$ et $g(x) = \ln x$.
4. Pour tracer e^{x-2}, on translate la courbe de e^x horizontalement de 2 vers la droite.