Les réels

Plan

$\mathbb{R}$ et ses variantes

Notation :

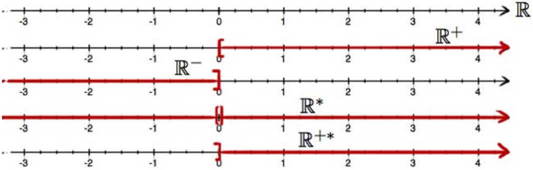
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des réels auquel on rajoute les symboles $+\infty$ et $-\infty$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

- $\mathbb{R}^+$ représente les réels positifs ou nuls : $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
- $\mathbb{R}^-$ représente les réels négatifs ou nuls : $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$.
- $*$ en exposant d'un ensemble signifie qu'on enlève 0 de cet ensemble.
  - $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ($\mathbb{R}$ privé de zéro)
  - $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
  - $\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$

Représentation graphique.

L'axe des réels est représenté par une droite horizontale graduée
Un point de la droite = un réel
Un ensemble de réels = une portion de cette droite



Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, dès qu'elle contient deux réels, elle contient aussi tous les réels intermédiaires.

Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ sans trou.

Exemple : $\mathbb{R}^+$ est un intervalle.
$\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Remarque : L'intersection de deux intervalles est un intervalle.

La réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle.

Exemple : $[0;1] \cup [2;3]$ n'est pas un intervalle.

Listes des types d'intervalles

$$I = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\} = [a; b] \qquad \text{segment}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\} = [a; b[$$

$$I = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\} =]a; b]$$

$$I = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\} =]a; b[$$

$$I = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x\} = [a; +\infty[$$

$$I = \{x \in \mathbb{R},\ a < x\} =]a; +\infty[$$

$$I = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\} =]-\infty; b]$$

$$I = \{x \in \mathbb{R},\ x < b\} =]-\infty; b[$$

$$I = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$I = \varnothing$$

Exercice

Représenter graphiquement sur un axe réel gradué les ensembles suivants, puis les décrire à l'aide d'inégalités.

$$A =]5,1;7], \quad B = [-2;+\infty[, \quad C = [-4;6] \cap [2;9],$$

$$D = [-4;6] \cup [2;9], \quad E = [1;3[\cup[6;7,5], \quad F = [1;3[\cap[6;7,5],$$

$$G = ([-8;-6,5]\cup]-5;-3[)\cap]-7;-4,3]$$

Notions

- $A \cap B$ est l'intersection de A et B, c'est-à-dire ce qui est **à la fois** dans A et B
- $A \cup B$ est la réunion de A et B, c'est-à-dire ce qui est dans A ou B (ou les deux à la fois)

Plan

La relation de comparaison $\leqslant$ est une relation d'ordre.

1. réflexive : $x \leqslant x$.
2. transitive :
$$x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$$
3. antisymétrique :
$$x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x \Rightarrow x = y$$

Ne change pas le sens de l'inégalité

- On peut additionner un nombre de chaque coté d'une inégalité.

$$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leqslant y + z$$

- On peut multiplier chaque coté d'une inégalité par un nombre positif.

$$(x \leqslant y \text{ et } z \geqslant 0) \quad \Longrightarrow \quad xz \leqslant yz$$

- On peut multiplier entre elles deux inégalités positives

$$(0 \leqslant x \leqslant y \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant t) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant xz \leqslant yt$$

- On peut passer au carré une inégalité positive

$$0 \leqslant x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad x^2 \leqslant y^2$$

change le sens de l'inégalité

- Multiplier une inégalité par -1 change le sens de l'inégalité.

$$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad -y \leqslant -x$$

- Passer à l'inverse dans une inégalité positive change le sens de l'inégalité.

$$0 < x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$$

Résoudre une équation ou inéquation simple.

Résoudre = déterminer toutes les valeurs de x solution d'une équation ou inéquation.

Equation : on la reconnait au signe $=$.

on applique des opérations identiques de chaque coté de l'égalité, jusqu'à arriver à isoler x seul d'un coté.

1. termes additionné/soustrait à x On additionne de chaque coté de l'égalité même termes avec les signes opposés :

$$3x-5=2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x-5\boxed{+5}=2\boxed{+5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x=7$$

on a l'impression que le terme est passé de l'autre coté en changeant de signe

2 facteurs multipliés par x On multiplie par l'inverse de chaque coté de l'égalité :

$$
\begin{aligned}
& 3x = 7 \\
\Leftrightarrow \quad & 3x \times \boxed{\frac{1}{3}} = 7 \times \boxed{\frac{1}{3}} \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

on a l'impression que le 3 est passé de l'autre coté.

Exemple :

$$
\begin{aligned}
& \frac{x}{5} = a \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x}{5} \times 5 = a \times 5 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 5a
\end{aligned}
$$

Remarque : Toujours vérifier qu'on ne divise (ou multiplie) pas par 0 !

S'il y a une fonction, on essaye d'appliquer la fonction « contraire » (bijection réciproque) pour la simplifier.

$$\begin{aligned} & e^x = 5 \\ \Leftrightarrow \quad & \ln(e^x) = \ln(5) \\ \Leftrightarrow \quad & x = \ln 5 \end{aligned}$$

Attention, ce n'est pas une multiplication par ln ! ! ! C'est une composition par ln.

Se méfier des carrés et des fonctions trigo

Exemple :

$$x^2 = 5$$

si on applique la racine carré de chaque coté, on obtient

$$x = \sqrt{5}$$

Mais $x = -\sqrt{5}$ est aussi une solution ! ! (c.f. valeur absolue).

Exemple : $\cos x = \frac{1}{4}$ (c.f. cours avant)

Inéquation. on la reconnait aux signes $\leqslant, \geqslant, <, >$.

on applique des opérations identiques de chaque coté de l'inégalité, jusqu'à arriver à isoler x seul d'un coté.... en faisant attention que certaines opérations changent le sens de l'inégalité !

1. termes additionné/soustrait à x On additionne de chaque coté de l'égalité même termes avec les signes opposés. (ne change pas le sens des inégalités)

$$6x + 4 \leqslant 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x + 4 \boxed{-4} \leqslant 3 \boxed{-4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x \leqslant -1$$

2. facteurs multipliés par x On multiplie par l'inverse de chaque coté de l'égalité :

$$6x \leqslant -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x \boxed{\times \frac{1}{6}} \leqslant (-1) \boxed{\times \frac{1}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{-1}{6}$$

ATTENTION ! Si ce facteur est négatif, il faut changer le sens de l'inégalité !

$$-4x \leqslant 7 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{7}{-4}$$

Et si on ne sait pas le signe de la quantité :

- soit on ne divise pas
- soit on traite séparément tous les cas (positif, négatif ou nul).

S'il y a une fonction, on essaye d'appliquer la fonction « contraire » pour la simplifier,

- Si la fonction est croissante, l'inégalité ne change pas.

$$\begin{aligned} & \ln(x) \geqslant -6 \\ \Leftrightarrow \quad & \exp(\ln(x)) \geqslant \exp(-6) \\ \Leftrightarrow \quad & x \geqslant e^{-6} \end{aligned}$$

- Si la fonction est décroissante, l'inégalité change de sens.
- Si la fonction a des parties croissantes et des parties décroissantes, on ne peut pas l'appliquer sur les deux coté de l'inégalité !

Exercice

Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue x :

$$x-2<4,\quad 3x+5=-5,\quad -2x-1<-3,\quad \frac{x}{4}-3\leqslant 1$$

Présenter les solutions sous forme d'intervalle.

Notions.

- Pour résoudre, il faut appliquer les mêmes opérations de chaque coté de l'égalité ou inégalité. (Pour isoler x).
- Ajouter et soustraire un nombre de chaque coté d'une inégalité ne change pas le sens
- multilplier et diviser par un nombre positif de chaque coté d'une inégalité ne change pas le sens
- multilplier et diviser par un nombre négatif de chaque coté d'une inégalité change le sens

Tableau de signe

On veut déterminer le signe d'une quantité $Q(x)$ ou alors résoudre une inéquation du type

$$Q(x) > 0, \quad Q(x) < 0, \quad Q(x) \leqslant 0, \quad Q(x) \geqslant 0$$

Q est constituée de produit ou de quotient :

$$Q(x) = A(x) \times B(x), \quad Q(x) = \frac{A(x)}{B(x)}, \quad Q(x) = \frac{A(x) \times C(x)}{B(x)}$$

Technique : On étudie séparément le signe de chacune des quantités qui intervient dans Q et on présente le résultat sous forme d'un tableau.

- Première ligne $=$ toutes les valeurs importantes de x dans l'ordre croissant.
- Ensuite, une étude de signe par ligne : 0, $+$ (positif) et - (négatif) selon les valeurs de x.
- Dans la dernière ligne, on met Q et on fait le bilan des signes et des 0 :
  1. 0 au numérateur $\to$ 0
  2. 0 au dénominateur $\to$ valeur interdite (double barre)
  3. $++ \to +$
  4. $+- \to -$
  5. $-- \to +$

Dans la dernière ligne, on regarde le signe qui nous intéresse et on garde le ou les intervalles de x correspondant.

Exemple : On veut savoir quand $Q(x) = \frac{(1-x)(2x+3)}{(x+5)}$ est positif.

1. On étudie le signe de $1 - x$.

$$1 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

   $1 - x$ est positif avant 1 et négatif après 1.

2. On étudie le signe de $2x + 3$.

$$2x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$$

   $2x + 3$ négatif avant $-\frac{3}{2}$ et positif après.

3. On étudie le signe de $x + 5$.

$$x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -5$$

   avec $x + 5$ négatif avant -5 et positif après. .

On obtient le tableau suivant :

x		-5		$-\frac{3}{2}$		1	
$1-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$Q(x)$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc Q est positif quand $x \in]-\infty; -5[\cup \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$.

Exercice

Résoudre l'inéquation suivante à l'aide d'un tableau de signe.

$$(x-1)(4-3x) \leqslant 0;$$

Notion. On étudie séparément le signe de chacune des quantités qui intervient dans Q et on présente le résultat sous forme d'un tableau. La première ligne est celle de x, on y met toutes les valeurs importantes (celles qui font un 0 quelque part) dans l'ordre croissant. Ensuite, on met une étude de signe par ligne, en mettant les symboles 0, $+$ (positif) et - (négatif) selon les valeurs de x. Dans la dernière ligne, on met Q et on fait le bilan des signes et des 0. Dans cette dernière ligne, on regarde le signe qui nous intéresse et on garde le ou les intervalles de x correspondant.

Majorant et minorant

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- un nombre M est un majorant de A si
$$\forall x \in A,\ x \leqslant M$$
A est majorée
- un nombre m est un minorant de A si
$$\forall x \in A,\ m \leqslant x$$
A est minorée
- Si A est majorée et minorée, alors A est bornée
$$\exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |x| \leqslant N$$

Exemples :

1. $$A = [-1;2] \cup [3;4] \cup \{8\}$$

   9 est un majorant de A et -3 est un minorant de A. A est bornée.

2. $$A = [7;+\infty[$$

   A est minorée (par exemple par 6) mais n'admet aucun majorant. Elle n'est pas bornée.

3. $]-\infty, 8[$ est majoré par 8 mais n'est pas minoré donc il n'est pas borné.
4. $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré ni minoré.
5. l'intervalle $]1, 2[$ est borné.

Définition

a est le plus grand élément de A si $a \in A$ et si a est un majorant de A.

$$a = \max(A)$$

---

a est le plus petit élément de A si $a \in A$ et si a est un minorant de A.

$$a = \min(A)$$

Exemples :

1. $\max([-6, 4]) = 4$.
2. $A =]-3; 5[\cup \{7\}$ ne possède pas de plus petit élément

Exercice

1. Donner lorsqu'ils existent le plus petit élément et le plus grand élément des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :
$A = \{3; 12; -100; 1\}$, $B = [0; 1[\cup]3; 4[$,
$C = \{1/k; k \in \mathbb{Z}^*\}$, $D = \{1/k; k \in \mathbb{N}^*\}$, $\quad \mathbb{N}$.
2. Déterminer si les parties suivantes sont majorées et donner le cas échant un majorant :
$F = \{3; 12; -100\}$, $G =]-\infty, 8[$, $H = \{2k + 1; k \in \mathbb{N}\}$.

Plan

Définition

La partie entière de x est $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à x.

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

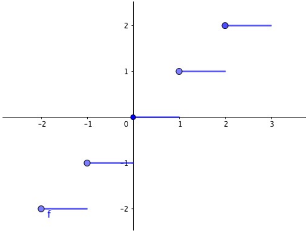
Exemples : $\lfloor 3 \rfloor = 3$; $\lfloor 1,2 \rfloor = 1$; $\lfloor \frac{1}{3} \rfloor = 0$; $\lfloor \pi \rfloor = 3$.
Attention aux nombres négatifs : $\lfloor -1 \rfloor = -1$; $\lfloor -0,5 \rfloor = -1$; $\lfloor -7,01 \rfloor = -8$.

Propriété.

La partie entière est une fonction croissante et continue par morceaux.

la partie entière conserve les inégalités :

$$x \leqslant y \;\Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$$



Et il en reste quoi ?

1. On a $5 \leqslant x < 7$. x appartient à quel ensemble ?

$$[5, 7], \quad [5, 7[, \quad]5, 7], \quad]5, 7[$$

2. On a $x \geqslant -2$. Diviser l'inégalité par 2, retrancher 5 et multiplier par -3. Qu'est-ce que ça donne comme inégalité ?
3. 3 est le plus petit élément de quel(s) ensemble(s) ?

$$]3, 6[, \quad \mathbb{N}\backslash\{0, 1, 2\}, \quad [3, 12[, \quad \{4, 5, 2, 8\}, \mathbb{Q}$$

4. On a $1,543 \leqslant x \leqslant 4,999$. La partie entière de x est entre quels entiers ?

Réponses.

1. $5 \leqslant x < 7$ signifie x appartient à $[5, 7[$
2. $$\frac{-3x}{2} + 15 \leqslant 18$$
3. 3 est le plus petit élément de
$$\mathbb{N} \backslash \{0, 1, 2\}, \quad [3, 12[$$
4. Si $1,543 \leqslant x \leqslant 4,999$, alors
$$1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant 4$$