Ensembles

(2)

Plan

Une phrase mathématique (écrite en français ou en symbole) qui énonce une propriété est une proposition

Elle est soit vraie, soit fausse, mais jamais entre les deux.

La négation d'une phrase mathématique

Faire le contraire (négation) d'une proposition mathématique P

1. Dans la partie introduction des variables :
   - $\forall$ devient $\exists$
   - $\exists$ devient $\forall$
2. Dans la partie qui suit :
   - on met les verbes au négatif si ils étaient au positif (et inversement),
   - $\leqslant$ devient $>$ (et inversement)
   - $=$ devient $\neq$
   - ...

On obtient alors la proposition $non(P)$.

Entre une phrase et sa négation, une est vraie et l'autre est fausse.

Exemple :

$$\forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1], y^2 = x$$

Sa négation est

$$\exists x \in [0,1], \forall y \in [0,1], y^2 \neq x$$

Il existe un nombre x entre 0 et 1 qui n'est le carré d'aucun nombre y entre 0 et 1

Exercice

Ecrire la négation des propositions mathématiques suivantes.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 2, \frac{3}{x-2} = 5$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists x > 0, \frac{1}{x} < \epsilon$$

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [3, +\infty[, -2x^2 + 6x + 1 \geqslant M$$

Notions.

- Dans la partie introduction des variables : on transforme les $\forall$ en $\exists$. Et les $\exists$ en $\forall$.
- Dans la partie qui suit : on met les verbes au négatif si ils étaient au positif (et inversement), les $\leqslant$ deviennent des $>$ (et inversement), les $=$ deviennent des $\neq$...

Opérations logiques sur des propositions

On note P et Q deux propositions.

Ou « P ou Q » est vraie si au moins une des deux propositions est vraie (soit P, soit Q, soit les deux à la fois)

Et « P et Q » est vraie si P et Q sont vraies toutes les deux, en même temps.

L'implication.

On démarre de P une proposition vraie, et à l'arrivée on obtient Q (vrai). Dans ce cas, on note

$$P \boxed{\Longrightarrow} Q$$

cause $\Longrightarrow$ conséquence.

$$\boxed{\text{si}}\ P,\ \boxed{\text{alors}}\ Q$$

En français : donc, par conséquent, on en déduit que, il vient que... Ou implicitement quand on fait des calculs les uns derrière les autres. Ce n'est pas utile de mettre $\Longrightarrow$ entre chaque ligne.

Remarque : Attention, la flèche ne va que dans un seul sens ! ! !

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Longrightarrow x^2 > 0$

Remarque : Démarrer de P une proposition fausse ne se fait que dans le cadre du raisonnement par l'absurde.

La réciproque.

la réciproque de $P \Longrightarrow Q$ est

$$Q \Longrightarrow P,$$

Si une des proposition est vraie, rien ne garantit que l'autre soit vraie ou fausse !

La contraposée.

La contraposée de $P \Longrightarrow Q$, est

$$non(Q) \Longrightarrow non(P)$$

Ce qui veut dire la même chose !

Si une proposition est vraie, alors sa contraposée est vraie aussi.
Si la proposition est fausse, alors sa contraposée est fausse aussi.

L'équivalence

Si $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$, alors

$$P \Longleftrightarrow Q$$

- P est équivalent à Q
- P et Q sont équivalents
- P si, et seulement si, Q.

P et Q sont vraies toutes les deux en même temps, ou fausses toutes les deux en même temps.

Attention ! Ne pas utiliser $\Longleftrightarrow$ n'importe où !
On ne pense jamais à vérifier que $\Longleftarrow$ marche (se méfier des carrés et des cosinus).

Exercice

On donne deux propositions A : « $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 > 36$ » et B : « $x > 6$ ».
A-t-on

- $A \Rightarrow B$?
- $B \Rightarrow A$?
- $A \Leftrightarrow B$

?

Notions.

- $P \Longrightarrow Q$: On démarre de P une proposition vraie, on obtient Q vrai.
- $P \Longleftrightarrow Q$: $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$.

Plan

Le raisonnement est l'enchaînement des explications, justifications et calculs qui permettent de montrer qu'un résultat est vrai.

On dit Prouver ou Démontrer le résultat.

Le raisonnement direct. le plus utilisé et le plus simple.

On part des données de l'énoncé (qui sont vraies) et on essaye d'en tirer un résultat en utilisant des calculs ou des connaissances du cours.

Le raisonnement à l'envers. variante du raisonnement direct.

- Au brouillon : on part du résultat qu'on veut obtenir, et on cherche d'où il vient.
- Une fois qu'on a trouvé le point de départ (quelque chose qui est vrai), on passe au propre
- On recopie le brouillon en partant de la fin.

Le raisonnement au cas par cas. il y a un nombre fini de cas qu'on liste précisément et traite un par un.

Le raisonnement par contre-exemple. On cherche à montrer qu'une proposition P est **fausse**

On trouve **un** exemple ou **un** cas où ça ne marche pas. On peut alors affirmer que P est faux.

Attention un exemple n'est jamais une preuve valable pour le Vrai !

Exercice

On considère la proposition $\mathcal{P}$ suivante : « Si les fonctions u et v sont croissantes sur $\mathbb{R}$, alors la fonction produit uv est croissante sur $\mathbb{R}$ ».

1. On pose $u : x \to x+1$ et $v : x \to x-1$. Donner le sens de variation de u et v sur $\mathbb{R}$
2. Calculer la fonction produit uv et donner son sens de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Que peut-on en conclure sur la proposition $\mathcal{P}$?

Le raisonnement par contraposée. On veut montrer une implication $P \Longrightarrow Q$ mais on n'y arrive pas en raisonnement direct.

On va montrer la contraposée $non(Q) \Longrightarrow non(P)$

On part de la négation de Q, et on doit arriver à la négation de P. Si on y arrive, alors on a prouvé que $P \Longrightarrow Q$.

Le raisonnement par l'absurde. On cherche à montrer qu'une proposition P est fausse.

On suppose par l'absurde que P (est vrai).

Puis on tire rigoureusement et logiquement les conséquences de P jusqu'à trouver quelque chose qui n'a pas de sens, qui est impossible ou totalement contradictoire : absurde.
Donc P est faux.

Remarque : On peut aussi utiliser l'absurde pour montre que P est vraie. On suppose que *non*(P) est vraie, on arrive à une absurdité. Donc *non*(P) est fausse. Donc P est vraie.

Le raisonnement par récurrence. Voir chapitre plus tard....