Plan

Les mathématiques du dromadaire

Définition

Un dromadaire est un animal à quatre pattes et qui a une bosse sur le dos.

Exemple :



Propriété.

Un dromadaire marche.

Démonstration. Un dromadaire est un animal à quatre pattes, les pattes servent à marcher. Donc le dromadaire marche.

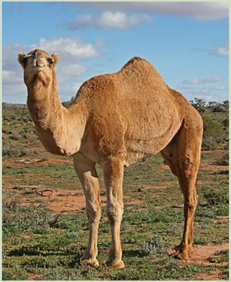
Théorème. Du Dromadaire

Si D est un dromadaire, C un chargement et V une ville, alors D est capable de transporter C jusqu'à V.

Démonstration. Hors-programme.

Exercice

Soit Job un marchand. Il possède Duduche (voir image ci-dessous) et un chargement de pommes. Prouver que Job peut amener ses pommes jusqu'à Trifoullis-les-oies.



Correction. Duduche est un dromadaire car c'est un animal à quatre pattes et avec une bosse sur le dos. Les pommes sont un chargement et Trifoullis-les-oies est une ville. Donc d'après le théorème du Dromadaire, Duduche peut transporter les pommes jusqu'à Trifoullis-les-oies.

Ce qui n'arrive jamais en math...

Ceci est un dromadaire.

Ensembles

Plan

Définition

Un ensemble E est une collection d'objets.

Définition

$$b \in E$$

signifie b appartient à E, b est un élément de E

Si a n'appartient pas à E : $a \notin E$.

Pour décrire un ensemble :

- $E = \{\ \dots\}$, la liste des objets de E entre deux accolades

  Exemple : $E = \{1, -2, 6, 27, a, r\}$
- $E = \{x, x \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$, E contient tous les objets x vérifiant une propriété $\mathcal{P}$

  Exemple : $F = \{x \in \mathbb{R}, x^2 > 1\}$,

  $$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$$
- par des phrases.

  Exemple : G est le cercle de centre O et de rayon 1.

Notations

$\boxed{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.
$\boxed{\mathbb{Z}} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs,
$\boxed{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des rationnels (quotients de deux nombres entiers relatifs),
$\boxed{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des réels .
$\boxed{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des complexes.

Exemple : $2 \in \mathbb{N}$ (deux est un entier)
$\pi \in \mathbb{R}$ (π est un réel),
$2 \in \mathbb{R}$ (deux est un réel).
$\pi \notin \mathbb{N}$ (π n'est pas un entier).

Définition

F une partie ou sous-ensemble de E est un ensemble constitué d'objets de E.

$$F \boxed{\subset} E$$

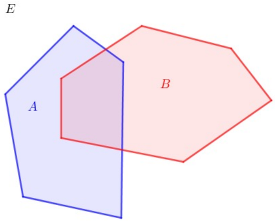
se lit "inclus dans"
Tout ce qui est dans F est aussi dans E.

Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
$\mathbb{R} \not\subset \mathbb{N}$.

Remarque : Attention à $\in$ et $\subset$.

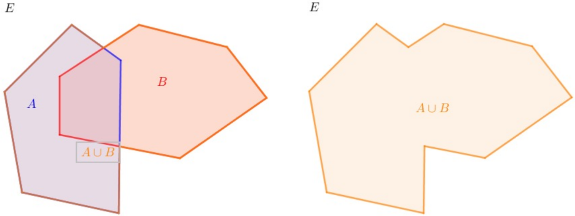
Opération de sous-ensembles

A, B deux parties de E



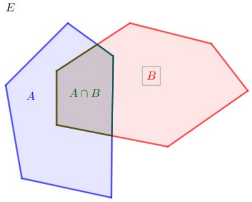
$\boxed{A \cup B}$ (≪ A union B ≫) est **l'union** de A et B, elle est constitué des éléments qui sont dans A ou B (ou dans les deux à la fois).

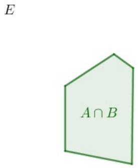
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$



$\boxed{A \cap B}$ (≪ A inter B ≫) est l'intersection de A et B, elle est constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

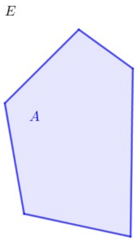
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

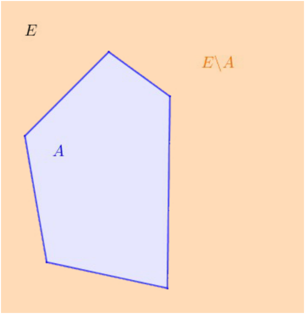




Le complémentaire de A dans E est $E \backslash A$ (« E privé de A ») ou $\bar{A}$ (ou $\mathcal{C}^E A$). Il est constitué des éléments qui n'appartiennent pas à A.

$$x \in E \backslash A \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \in E.$$





Exercice

On note $E = \{a, b, c, d, e\}$. Les complémentaires seront dans l'ensemble E. On pose $A = \{a, e\}$ et $B = \{b, a, c\}$. Donner les ensembles

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \backslash A, \quad \overline{A}, \quad A \cap \overline{B}$$

Notions.

- $A \cup B$ est la partie de E dont les éléments sont dans A ou B.
- $A \cap B$ est la partie de E dont les éléments sont à la fois dans A et dans B.
- $E \backslash A$ ou $\bar{A}$ est la partie de E dont les éléments n'appartiennent pas à A.

Propriétés

Distribuer avec des parenthèses :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Le complémentaire d'une union est une intersection (et vice-versa)

$$E \backslash (A \cap B) = (E \backslash A) \cup (E \backslash B), \qquad E \backslash (A \cup B) = (E \backslash A) \cap (E \backslash B)$$

Définition

A, B deux ensemble. $A \times B$ est le produit cartésien de A et B :

$$A \times B = \{(x, y), x \in A, y \in B\}.$$

Ensemble des couples formés avec un élément de A et un de B.

Remarque : $A \times A = A^2$
$A \times A \times A = A^3$

....

Exemples :

1. $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble de tous les couples (x, y) où x et y sont des réels. $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble de tous les triplets (x, y, z) où x, y et z sont des réels.
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ contient des éléments du type (n, x, z) avec n un entier naturel, x un réel et z un complexe.
3. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$ contient des éléments du type $((x, y), (w, z))$ avec x et y des réels, w et z des complexes.

Méthode de la double inclusion.

Soient A, B deux ensembles. On veut montrer que

$$A = B$$

c'est à dire que les deux ensembles sont égaux, on procède par étapes :

1. Soit $x \in A$. Comme x est dans A, il vérifie telles propriétés
   .... insérer ici les calculs...
   Donc au final $x \in B$. Donc $\boxed{A \subset B}$.
2. Soit $x \in B$. Comme x est dans B, il vérifie telles propriétés
   .... insérer ici les calculs...
   Donc au final $x \in A$. Donc $\boxed{B \subset A}$.
3. On a $A \subset B$ et $B \subset A$, donc $\boxed{A = B}$

Plan

Apprenons à déchiffrer les hiéroglyphes :

$$\forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1], y^2 = x$$

Dans cette expression mathématiques (qui est une phrase), on trouve :

- des lettres x, y, appelés aussi variables.
- Des quantificateurs $\forall$ et $\exists$
- Des ensembles $[0,1]$
- des symboles divers $\in$, $=$, $\geqslant$, ^{2}.

Les variables

Une variable est une lettre (ou un symbole, un mot) qui sert à représenter un objet.

Exemple : « a^2 est un nombre positif »

Pour éviter les confusions, il faut introduire les notations = expliquer le type de chaque variable utilisée.

L'introduction universelle

On veut que les résultats ou les calculs qui suivent soient valables pour tout les éléments d'un certain type.

- En français :

soit la variable $\in$ son ensemble d'appartenance,
propriétés et/ou calculs avec la variables.

Exemples : Soit x un nombre positif, on calcule $x^2 + 3$....
Soit $z \in \mathbb{C}$ (ce qui signifie que z est un complexe), on cherche la partie imaginaire de z.
On pose A un point de la droite D, on trace la perpendiculaire à D passant par A.
On note u le vecteur directeur de la droite D.

- En langage mathématique : le quantificateur $\forall$.
  $\forall$ signifie « pour tout » ou « quel que soit ».

$\forall$ la variable $\in$ son ensemble d'appartenance, propriétés et/ou calculs avec la variables.

$\forall$ introduit une variable pouvant être remplacée par toutes les valeurs de l'ensemble donné $\rightarrow$ Propriétés générales

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x^2 + 3x - 5$

$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

Exercice

Traduire en langage courant la proposition mathématique suivante.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$$

Peut-on remplacer x

- par 3 ?
- Par -2 ?
- Par $1 + 2i$?
- Par $\sqrt{7}$?

Notion. $\forall$ se lit ≪ pour tout ≫ ou ≪ quel que soit ≫ et il est utilisé pour introduire une variable pouvant être remplacée par toutes les valeurs de l'ensemble donné.

L'introduction existentielle.

On veut que résultat ou le calcul soit valable pour (au moins) un élément parmi l'ensemble considéré.

- En langage mathématique : $\exists$. $\exists$ se lit « il existe ». Il introduit une variable qui contient un élément particulier vérifiant la propriété.

  Exemple : $\exists n \in \mathbb{Z},\ n^2 = 9$ signifie : je peux trouver un entier n qui donne 9 quand on le met au carré.
  $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 9$ Vrai
  $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = -9$ Faux

Si c'est une question qu'on vous pose, vous devez trouver un exemple précis qui marche dans la formule, ou alors justifier qu'il y a un élément qui marche (même si vous ne savez pas précisément lequel).

$\exists!$ =il n'y a qu'un seul et unique élément qui vérifie la propriété.

Remarque : on ne peux pas déplacer $\exists$ dans une formule

Exercice

Traduire en langage courant la proposition mathématique suivante.

$$\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 2, \frac{3}{x-2} = 5$$

Peut-on remplacer x

- par -3 ?
- Par 2 ?
- Par $1+2i$?
- Par $\frac{13}{5}$?

Notion. $\exists$ se lit « il existe » et il sert à introduire une variable ayant une propriété spéciale. Cette variable représente un élément particulier vérifiant la propriété.

Et la phrase mystère est....

$$\forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1], y^2 = x$$

$\forall x \in [0,1]$	Pour tout réel x compris entre 0 et 1 (0 et 1 inclus)
$\exists y \in [0,1]$	il existe (on peut trouver) un réel qu'on appelle y
	et qui doit être entre 0 et 1
	tel que
$y^2 = x$	x soit le carré de y.

Pour utiliser cette formule :

- Je choisis un réel x entre 0 et 1 : $x = 0,25$
- Je sais qu'il y a un y qui marche.
  $y = 0,5$ marche car $(0,5)^2 = 0,25$

Si je choisis un autre x

- $x = 0,25874953665$
- Je sais qu'il y a un y qui marche. Je l'utilise même sans connaître sa valeur.

Pour démontrer cette formule :

- Soit $x \in [0, 1]$.
  J'introduis x un réel entre 0 et 1 (interdit de lui donner une valeur numérique ! !)
- Je prouve que je peux trouver y.
  On pose $y = \sqrt{x}$. On vérifie que le y marche.
  - Si x est entre 0 et 1, alors $\sqrt{x} = y$ est entre 0 et 1, donc $y \in [0, 1]$ est vérifiée.
  - Et dans la formule : $y^2 = (\sqrt{x})^2 = x$
- Donc la formule est vraie.

Exercice

Traduire en langage courant les propositions mathématiques suivante.

$$\forall \epsilon > 0, \exists x > 0, \frac{1}{x} < \epsilon$$

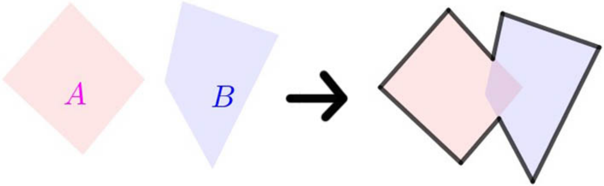
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [3, +\infty[, -2x^2 + 6x + 1 \geqslant M$$

Notions.

- $\forall$ se lit ≪ pour tout ≫ ou ≪ quel que soit ≫
- $\exists$ se lit ≪ il existe ≫
- l'ordre dans lequel la propriété est écrite doit être respecté.

Et il en reste quoi ?

1. Voici A et B deux ensembles et leur représentation conjointe. Quelle est la notation pour l'ensemble violet au milieu, et pour l'ensemble entourée en noir ?



2. Comment se lit $a \in A$ et qu'est-ce que ça implique pour a et A ?
3. Comment se lit $a \subset A$ et qu'est-ce que ça implique pour a et A ?
4. Traduire en notation mathématique la phrase suivante :
Il existe un réel positif x tel que pour tout y dans l'intervalle $[-1, 2]$, le carré de y soit plus petit que x.

1. l'ensemble violet est $A \cap B$ et l'ensemble entourée en noir est $A \cup B$.
2. $a \in A$ se lit a appartient à A. Ce qui implique que A est un ensemble et a un élément de cet ensemble.
3. $a \subset A$ se lit a est inclus dans A. Ce qui implique que A est un ensemble, mais aussi que a est un ensemble qui est contenu dans A.
4. Il existe un réel positif x tel que pour tout y dans l'intervalle $[-1, 2]$, le carré de y soit plus petit que x :

$$\exists x \geqslant 0, \quad \forall y \in [-1, 2], \quad y^2 \leqslant x$$