Géométrie : Vecteurs et Coordonnées

(4)

Plan

1. Déterminant de trois vecteurs dans l'espace

2. Produit vectoriel dans l'espace

$\mathcal{B}$ une base de l'espace. $\overrightarrow{u}(x,y,z)$, $\overrightarrow{v}(x',y',z')$ et $\overrightarrow{w}(x'',y'',z'')$ des vecteurs

Définition

Le déterminant de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ dans la base $\mathcal{B}$ est le nombre

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

$$= xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - x''y'z - y''z'x - z''x'y.$$

(Règle de Sarrus)

Technique du développement en ligne ou en colonne :

On choisit une ligne ou une colonne (entourez-la !). Ensuite, on suit la ligne choisie, coefficient par coefficient

$$\det = (*1)(*2)(*3) + (*1)(*2)(*3) + (*1)(*2)(*3) + \cdots$$

1. un signe $+$ ou $-$

$$\begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ (-) & (+) & (-) \\ (+) & (-) & (+) \end{vmatrix}$$

2. le coefficient
3. le déterminant de départ où on a enlevé la ligne et la colonne du coefficient.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} && \text{(première colonne)} \\
\det(A) &= -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} && \text{(deuxième colonne)} \\
\det(A) &= c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} && \text{(troisième colonne)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} && \text{(choix de la première ligne)} \\
\det(A) &= -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} && \text{(choix de la deuxième ligne)} \\
\det(A) &= g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} && \text{(choix de la troisième ligne)}
\end{aligned}
$$

Exemple : Calculer

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}
$$

Exercice

(TD) Développer le déterminant suivant selon la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 9 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Notion. Ensuite, on suit la colonne, coefficient par coefficient. A chaque fois, on ajoute un terme contenant trois facteurs :

1. un signe $+$ ou $-$, en sachant que le tout premier signe en haut à gauche de la matrice est toujours un $+$ et que les signes sont disposés en damier.
2. le coefficient
3. le déterminant de départ où on a enlevé la ligne et la colonne du coefficient.

Propriétés du déterminant

Propriété. antisymétrique

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$

$$= -\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = -\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = -\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}).$$

Corollaire. cyclique

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Propriété. trilinéaire

$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \mu \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{r}, \overrightarrow{w}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \mu \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{w})$$

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda \overrightarrow{w} + \mu \overrightarrow{r}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \mu \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{r})$$

Utilisation du déterminant dans l'espace

Propriété.

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0 \iff \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Corollaire.

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0.$$

Propriété.

Si $\mathcal{B}$ est orthonormée, $\left|\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\right|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$.

Plan

Produit vectoriel dans l'espace

Définition

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans un plan $\mathcal{P}$. On oriente ce plan par un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$:

- $\vec{n}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$ (donc à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$)
- $\vec{n}$ de longueur 1
- on lit l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du coté de $\vec{n}$

Le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur

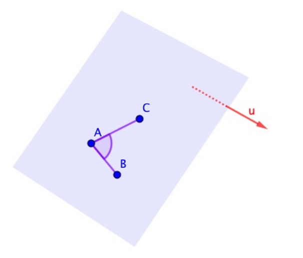
$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \underbrace{\left(\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\right) \times \overrightarrow{n}}_{\text{nombre }\times\text{vecteur}}$$

si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

Sinon $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0$.

Exercice

Dans l'espace, on considère le plan (ABC) ci-dessous, orienté par $\vec{u}$ qu'on considère unitaire. L'angle $\widehat{BAC}$ est de $60°$, la longueur AB vaut $\frac{1}{3}$ et la longueur AC vaut $\frac{1}{2}$. Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.



Notion. avec $\vec{n}$ orientant le plan contenant $(\vec{u}, \vec{v})$:

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \left(\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \right) \times \overrightarrow{n}$$

Propriétés géométriques

Propriété.

Le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Propriété.

si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et unitaires, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base orthonormale directe.

Antisymétrie et bilinéarité du produit vectoriel

Propriété.

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$$

$$(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}) + \mu(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$$

$$\overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})$$

Attention, le produit vectoriel n'est pas associatif :

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}).$$

Propriété. Double produit vectoriel

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$$

Expression dans une b.o.n.d.

Propriété.

$\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ dans une base orthonormale directe,

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées

$$\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$$

Technique : à connaître.

Et il en reste quoi ?

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace.

1. Regrouper ensemble les expressions égales :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}, \qquad \det(\vec{u},\vec{v}), \qquad \vec{u}\wedge\vec{v}$$

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v}), \quad \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}), \qquad \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})\vec{n}$$

   Au fait, c'est quoi $\vec{n}$?

2. Si on développe le déterminant suivant selon la deuxième ligne, qu'est-ce que ça donne (faire JUSTE) le développement) ?

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & b & 0 \end{vmatrix}$$

3. si $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$, que peut-on en déduire ?
4. Et si $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$?

1. les expressions egales :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}), \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})\vec{n}$$

   Et $\vec{n}$ est un vecteur de norme 1 orthogonal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. $$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{vmatrix}$$

3. si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
4. si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ne sont pas coplanaires, ils forment une base de l'espace.