Géométrie : Vecteurs et Coordonnées

(3)

1. Produit scalaire

2. Déterminant dans le plan

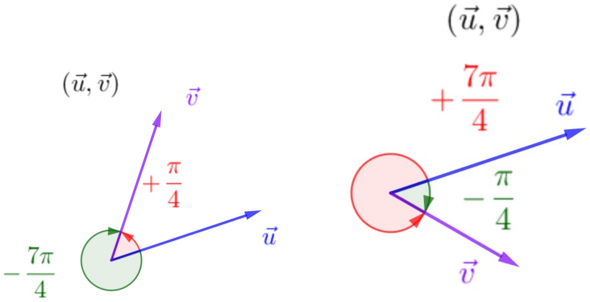
Plan

Mesure de l'angle entre deux vecteurs

Définition

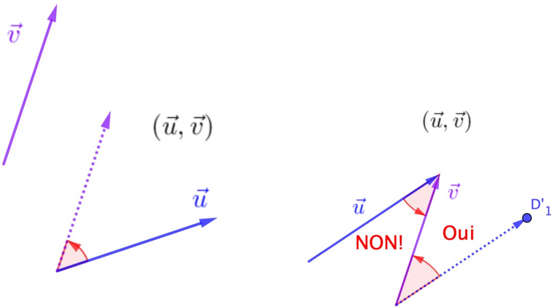
le nombre $(\vec{u}, \vec{v})$ est une mesure en radians de l'angle orienté allant de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$.

Exemples :



$(\vec{u}, \vec{v})$
$\vec{v}$
$+\frac{\pi}{4}$
$\vec{u}$
$-\frac{7\pi}{4}$
$(\vec{u}, \vec{v})$
$+\frac{7\pi}{4}$
$\vec{u}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\vec{v}$

il faut que les deux vecteurs aient la même origine



Dans le plan

Définition

Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est nul,
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sinon.

Remarque :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2$$

En particulier, $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = AB^2$.

Dans l'espace

Définition

Il existe $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ un plan qui contient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ noté est $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarque : le produit scalaire de l'espace $=$ produit scalaire du plan, dans le bon plan $\mathcal{P}$. Les propriétés sont les mêmes

Propriétés du produit scalaire

Propriété.

bilinéaire et symétrique :

(i) $\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \,.\, \overrightarrow{u}$ (symétrie).

(ii) $(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) \,.\, \overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{w} + \mu \overrightarrow{v} \,.\, \overrightarrow{w}$ (linéarité)

(iii) $\overrightarrow{u} \,.\, (\lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{w}) = \lambda \overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{w}$ (linéarité).

Propriété.

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \text{ (orthogonal)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = 0.$$

Démonstration.

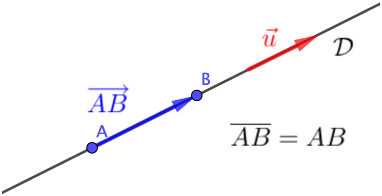
Définition

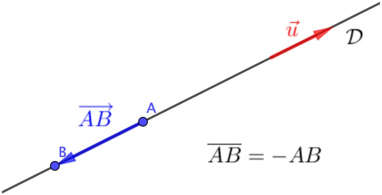
$\mathcal{D}$ une droite ayant un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. A et B deux points de $\mathcal{D}$.

La mesure algébrique de AB est

$$\overline{AB} = \begin{cases} 0 & \text{si } A = B \\ AB & \text{si les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont dans le même sens} \\ -AB & \text{si les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemples :


$\vec{u}$
$\mathcal{D}$
B
$\overrightarrow{AB}$
A
$\overline{AB} = AB$

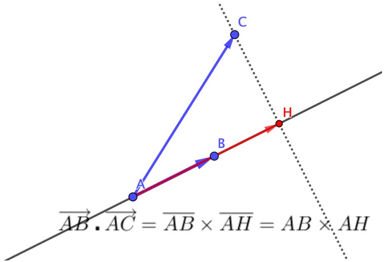

$\vec{u}$
$\mathcal{D}$
$\overrightarrow{AB}$
A
B
$\overline{AB} = -AB$

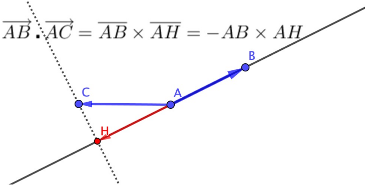
Propriété.

A, B, C trois points du plan, H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}.$$

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le même sens
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le sens contraire





Expression dans une base orthonormale

Propriété.

Dans une base orthonormale, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Démonstration. On décompose $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right) \cdot \left(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}\right)$$

$$= xx'\boxed{\vec{i} \cdot \vec{i}} + xy'\boxed{\vec{i} \cdot \vec{j}} + xz'\boxed{\vec{i} \cdot \vec{k}} + yx'\boxed{\vec{j} \cdot \vec{i}} + yy'\boxed{\vec{j} \cdot \vec{j}}$$

$$+yz'\boxed{\vec{j} \cdot \vec{k}} + zx'\boxed{\vec{k} \cdot \vec{i}} + zy'\boxed{\vec{k} \cdot \vec{j}} + zz'\boxed{\vec{k} \cdot \vec{k}}$$

$\vec{i}$ est de norme 1 et il fait un angle 0 avec lui-même donc

$$\boxed{\vec{i} \cdot \vec{i}} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$$

Les vecteurs de la bases étant orthogonaux deux à deux, on a

$$\boxed{\vec{i} \cdot \vec{j}} = 0$$

Donc il reste $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$

Corollaire.

$\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y, z) dans une base orthonormale

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ dans un repère orthonormal

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exercice

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ des vecteurs.

1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Que peut-on dire en déduire ?
2. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{w}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{w}\|$ et en déduire les mesures possibles de l'angle $(\vec{u},\vec{w})$.

Notions.

- $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$
- $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Propriété.

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace et $\vec{u}(x, y, z)$

$$x = \vec{u} \cdot \vec{\imath} \qquad y = \vec{u} \cdot \vec{\jmath}, \qquad z = \vec{u} \cdot \vec{k}$$

Remarque : Tout ce qui précède marche toujours dans le plan, avec deux coordonnées seulement. On enlève $z, z', z_B, z_A, \vec{k}$.

Plan

Déterminant dans le plan

Définition

$\mathcal{B}$ une base du plan et $\overrightarrow{u}(x, y)$, $\overrightarrow{v}(x', y')$ deux vecteurs
Le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

Exercice

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère $A(2; 1)$, $B(7; 2)$ et $C(3; 4)$ des points. Calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Propriété.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\quad\Leftrightarrow\quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$

Corollaire.

Dans un repère $(O;\mathcal{B})$, les points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $M(x, y)$ sont alignés

$$\iff \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

Démonstration. Les points A, B, M sont alignés
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires
$\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

Propriété.

Le déterminant est antisymétrique

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Le déterminant est bilinéaire

$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w}) = \lambda\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \mu\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \mu\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$$

Le déterminant dans une b.o.n.d.

Dans un repère $(O; \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B}$ base orthonormée directe.

Propriété.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Exemple : Dans un exercice précédent :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \to \|\vec{u}\| = \sqrt{5}, \quad \|\vec{w}\| = \sqrt{10}, \quad \cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On calcule

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}) = \begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 1 = 5$$

Or

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}) = \|\vec{u}\|\|\vec{w}\| \sin(\vec{u}, \vec{w})$$

$$5 = \sqrt{5}\sqrt{10}\sin(\vec{u}, \vec{w}) \quad \Rightarrow \quad \sin(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalement

$$(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{4}$$

Propriété.

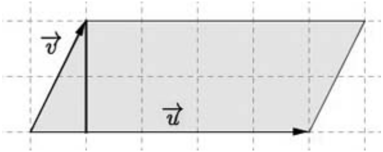
La valeur absolue du déterminant $|\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})|$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie tant qu'elle est orthonormale.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales, une directe et et une indirecte, alors le signe de $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ et de $\det_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v})$ seront opposés (même valeur mais signe opposé).

Propriété.

Dans une b.o.n du plan, $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$ est l'aire du parallélogramme porté par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Démonstration.



Et il en reste quoi ?

1. Si $\vec{u}$ est de longueur 5, $\vec{v}$ de longueur 2 et l'angle $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$, combien vaut le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
2. Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, que peut-on en déduire ?
3. Dans un triangle ABC rectangle en B, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ avec les longueurs algébriques.
4. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = ?$
5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = ?$
6. Si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$, que dire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Et des trois points A, B, C ?

Réponses.

1. Si $\vec{u}$ est de longueur 5, $\vec{v}$ de longueur 2 et l'angle $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$, le produit scalaire de $\vec{u} \cdot \vec{v} = \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$
2. Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, alors $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux.
3. Dans un triangle ABC rectangle en B, le projeté orthogonal de C sur AB est B, donc le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2$
4. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 9$
5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 19$
6. Si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. A, B, C sont alignés.