Géométrie : Vecteurs et Coordonnées
(2)

1. Coordonnées cartésiennes de vecteurs
2. Coordonnées cartésiennes de points
3. Autre mode de repérage

Plan

1. Coordonnées cartésiennes de vecteurs

2. Coordonnées cartésiennes de points

3. Autre mode de repérage

Bases du plan

Définition

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires et pas nuls

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est

- normée si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- directe si l'angle$(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath} \in]0, \pi[$.
- orthogonale si $\overrightarrow{\imath} \perp \overrightarrow{\jmath}$
- orthonormale $=$ normée et orthogonale.

b.o.n.d. $=$ base orthonormale directe .

Coordonnées de vecteur dans le plan

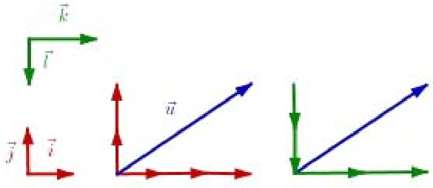
Propriété.

$(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ une base du plan.

$\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x, y) dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ si

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}.$$

Exemple :



$\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(3, 2)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

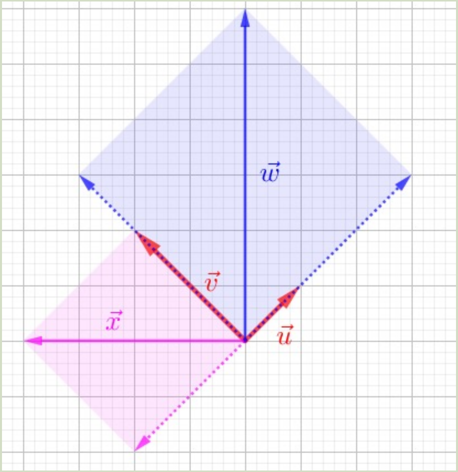
$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$\vec{u}$ a pour coordonnée $(2, -2)$ dans la base $(\vec{k}, \vec{l})$:

$$\vec{u} = 2\vec{k} - 2\vec{l}$$

Exercice

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{x}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.



Bases dans l'espace

Définition

$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de l'espace si les trois vecteurs sont non coplanaires et non nuls.

Définition

Une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormale si :

$$\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{j} \perp \overrightarrow{k}.$$

Convention : Une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est directe si :

- $(\vec{i}, \vec{j})$ à plat avec ange droit dans le sens positif, $\vec{k}$ pointe vers le haut.
- Sur la main droite $\overrightarrow{i} =$ le pouce, $\overrightarrow{j} =$ l'index, $\overrightarrow{k} =$ le majeur.

Dans le cas contraire, la base est indirecte.

Dans une base orthonormale directe, $\vec{k}$ oriente le plan engendré par $(\vec{i}, \vec{j}) =$ indique le sens positif de lecture des de vecteurs situés dans ce plan.

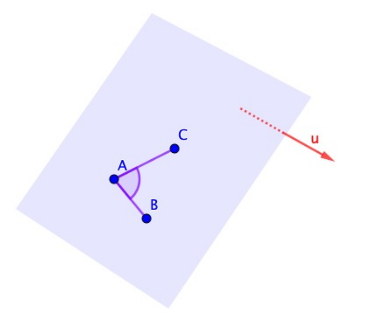
Définition

Orienter un plan $\mathcal{P}$ de l'espace, c'est choisir un vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{k}$ d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

Pour lire un angle dans $\mathcal{P}$, le regard doit être du coté du plan où se trouve la flèche du vecteur orientant le plan.

Exercice

On considères le plan (ABC) en bleu, orienté par le vecteur $\vec{u}$ en rouge. L'angle $\widehat{BAC}$ (non orienté) est de 60°.



Donner une mesure orientée de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en radian.

Coordonnées dans l'espace

Définition

Dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $\vec{u}$ a pour coordonnées (x, y, z) si

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}.$$

Notation matricielle : les vecteurs colonnes

Un vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées (x, y) dans une base.

Toutes ces notations sont valables :

$$\vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Remarque : Si nécessaire, préciser la base :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Un vecteur $\vec{u}$ de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans une base.

Toutes ces notations sont valables :

$$\vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Remarque : Si nécessaire, préciser la base :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Propriété.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\overrightarrow{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

$$\lambda\vec{u} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$$

Exercice

Dans une base de l'espace$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(2, -1, 3)$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(0, 5, 2)$. Calculer les coordonnées de $-\vec{u}$ et de $2\vec{u} + 3\vec{v}$.

Notion.

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$$

Plan

1. Coordonnées cartésiennes de vecteurs
2. Coordonnées cartésiennes de points
3. Autre mode de repérage

Repères

Définition

Un repère cartésien de l'espace est $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

- O est un point de l'espace, origine du repère
- $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace vectoriel.

Les axes du repère

- la droite (Ox) passant par O de vecteurs directeurs $\vec{\imath}$
- la droite (Oy) passant par O de vecteurs directeurs $\vec{\jmath}$
- la droite (Oz) passant par O de vecteurs directeurs $\vec{k}$

Définition

Un repère cartésien du plan est $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

- un point O du plan, appelé origine du repère
- $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan vectoriel.

Les axes du repère

- la droite (Ox) passant par O de vecteurs directeurs $\overrightarrow{i}$
- la droite (Oy) passant par O de vecteurs directeurs $\overrightarrow{j}$

Notation : Le repère est normé, orthogonal, orthonormal, direct ou indirect selon que la base est normée, orthogonale, orthonormale, directe ou indirecte. r.o.n.d $=$repère orthonormal direct

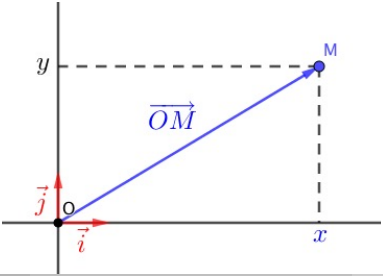
Coordonnées cartésiennes de points du plan

Définition

$\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan.
Le point M a pour coordonnées cartésiennes (x, y) dans $\mathcal{R}$:

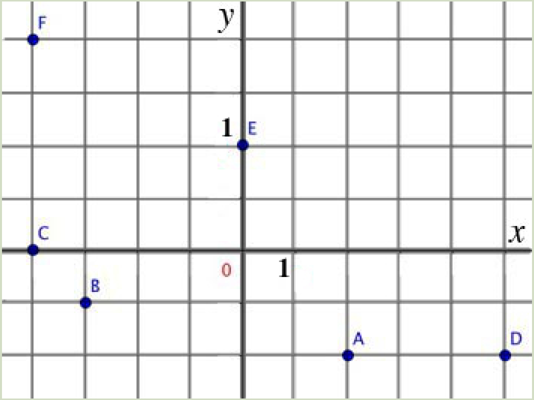
$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

x est l'abscisse du point M, y son ordonnée



Exercice

Par lecture graphique, donner les coordonnées de A, B, C, D, E et F dans le repère ci-dessous.



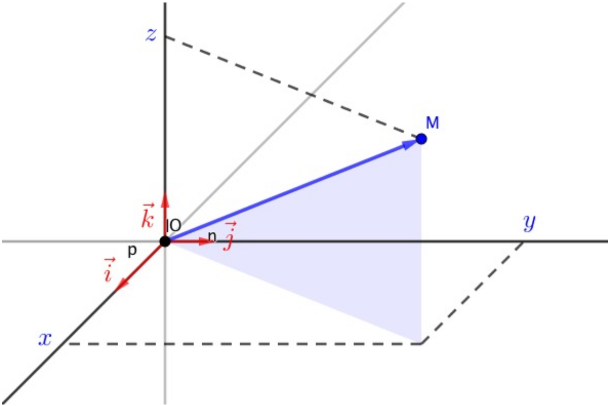
Coordonnées cartésiennes de points de l'espace

Définition

$\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace.
Le point M de l'espace a pour coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

x est l'abscisse du point M, y son ordonnée et z sa cote ou hauteur.


z
M
$\vec{k}$
O
n
$\vec{j}$
y
p
$\vec{i}$
x

Corollaire.

A et B deux points de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B).
le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Plan

1. Coordonnées cartésiennes de vecteurs
2. Coordonnées cartésiennes de points
3. Autre mode de repérage

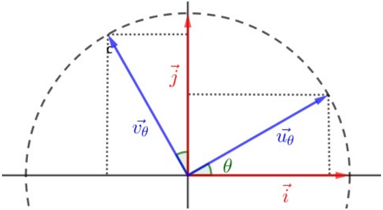
Repère polaire

Définition

Dans $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un r.o.n.d.

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}(\theta) = \cos(\theta)\,\overrightarrow{\imath} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{\jmath}, \\ \overrightarrow{v}(\theta) = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{\imath} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{\jmath}. \end{cases}$$

$(O; \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ est un r.o.n.d. appelé repère polaire.

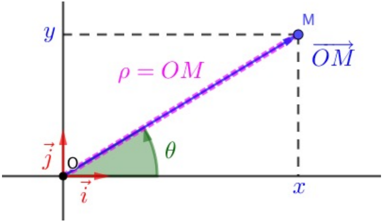


Propriété.

$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un r.o.n.d. du plan et M un point.
M a pour coordonnées polaires (ρ, θ) si

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}(\theta) = \rho\big(\cos(\theta)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\,\vec{\jmath}\big),$$

Donc M a pour coordonnées $(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Coordonnées polaires - coordonnées cartésiennes

Propriété.

M un point du plan avec (ρ, θ) ses coordonnées polaires et (x, y) ses coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

Remarque : on peut aussi utiliser la tangente : $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$.

Exercice

Soient $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal direct du plan et $A(-5, 5\sqrt{3})$. Déterminer un couple de coordonnées polaires de A.

Et il en reste quoi ?

1. C'est quoi une base de l'espace ?
2. On a $\vec{a} = 3\vec{u} - 7\vec{v}$. Quelles sont les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{v}, \vec{u})$?
3. Dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$, quelles sont les coordonnées de A ?
4. Et celles du point B tel que $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$?
5. D a pour coordonnées $(7, -1)$ et $E(5, 4)$, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$?
6. au fait, ça veut dire quoi que $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires ?

1. tune base de l'espace = trois vecteurs non coplanaires
2. $\vec{a} = 3\vec{u} - 7\vec{v}$ les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{v}, \vec{u})$ sont $(-7, 3)$
3. Dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées de A sont $(0, 0)$
4. $(5, 4)$
5. les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ sont $(5 - 7, 4 - (-1)) = (-2, 5)$
6. $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires $= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$ avec α, β, γ des réels.