Géométrie : Vecteurs et Coordonnées (1)

1 Les vecteurs

$\mathcal{E}$ est l'espace affine

- soit de dimension $2 =$ le plan
- soit de dimension $3 =$ l'espace

Plan

Définition

Un vecteur (plan ou espace) est caractérisé par :

- sa direction (pente, ligne support)
- son sens (orientation)
- sa longueur (norme)

Notation : lettre surmonté d'une flèche ($\vec{u}, \vec{b}$...)
Graphique : Une flèche (de direction, sens, norme précis)

Le vecteur nul $\vec{0}$ est le vecteur de longueur zéro.

L'ensemble des vecteurs E est l'espace vectoriel.

Quelle est la différence entre $\mathcal{E}$ l'espace affine et E l'espace vectoriel ?

- L'espace affine $\mathcal{E}$ contient les points (notés par une lettre majuscule)$=$ la feuille de papier sur laquelle on dessine les points, les droites, les figures ...
- L'espace vectoriel E ne contient que les vecteurs $=$ le papier calque sur lequel on trace les flèches $\to$ déplaçable au-dessus de l'espace affine.

Définition

A et B deux points distincts.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

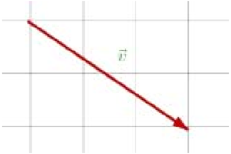
- sa direction est celle de la droite (AB)
- son sens est du point A vers le point B
- sa longueur est la longueur du segment $[AB]$.

La norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exemples :

$\overrightarrow{AB}$

- direction qui fait un angle de 30° (sens trigonométrique) par rapport à l'horizontale
- sens « vers la droite »
- longueur 7 unités



$\vec{v}$

- direction qui fait un angle de $-\arctan(2/3)$ (sens trigonométrique) par rapport à l'horizontale
- sens « vers la droite »
- longueur $\sqrt{13}$ unités

C un point. Le vecteur $\overrightarrow{CC}$ est le vecteur nul

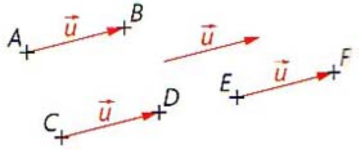
Propriété.

Deux vecteurs sont égaux

$$\Leftrightarrow$$

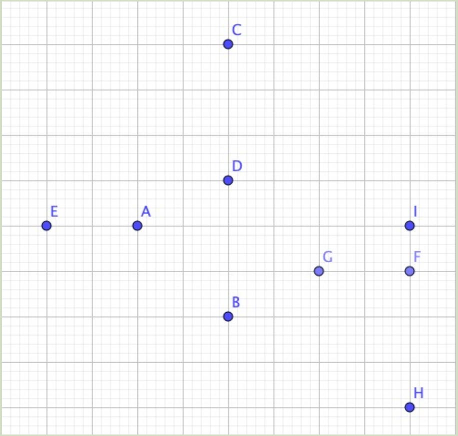
ils ont même direction, même sens et même longueur.

Exemple :

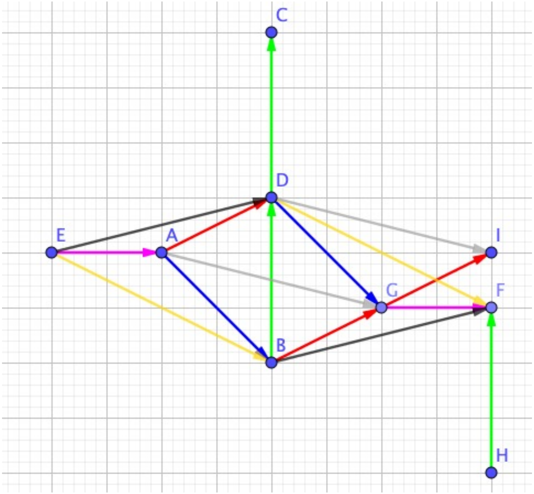


Exercice

Dans la figure ci-dessous, trouver des vecteurs égaux.



Notion. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur.



$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GF}, \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FG}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GI}, \quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{IG},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DG}, \quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GD}, \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FH}, \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{HF}$$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BF}, \quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FB}, \quad \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}, \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}, \quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DI}, \quad \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{ID}$$

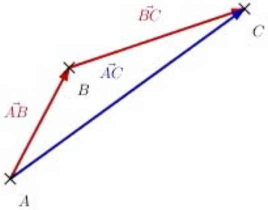
Opérations sur les vecteurs

Définition

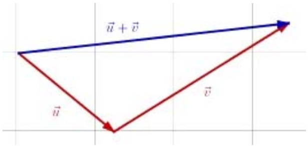
La somme de deux vecteurs est un vecteur qu'on peut déterminer avec la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme

Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

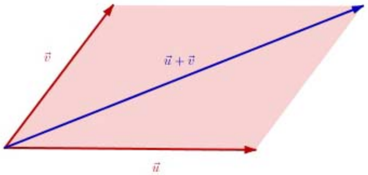


$\vec{u} + \vec{v}$



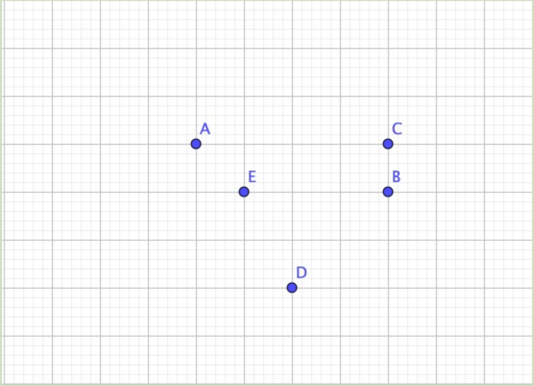
Règle du parallélogramme

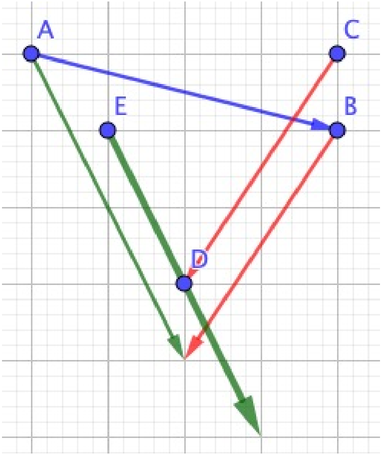
$\vec{u} + \vec{v}$ est une des diagonales du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

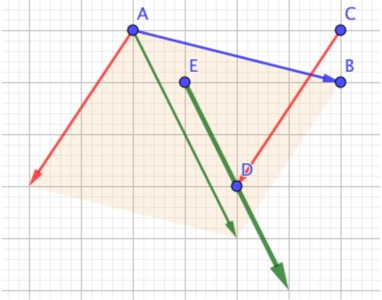


Exercice

(TD) Reproduire la figure, puis construire à partir du point E le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.




A
C
E
B
D


A
C
E
B
D

Définition

$\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.
le vecteur $k\vec{u}$:

- La même direction que $\vec{u}$,
- Le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et le sens contraire si $k < 0$
- la longueur $|k|.\|\vec{u}\|$

Propriété.

$$(-1)\vec{u} = -\vec{u}$$

$$(k+l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$$

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$$

Remarque : le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$. Il a même direction, même longueur mais le sens opposé.

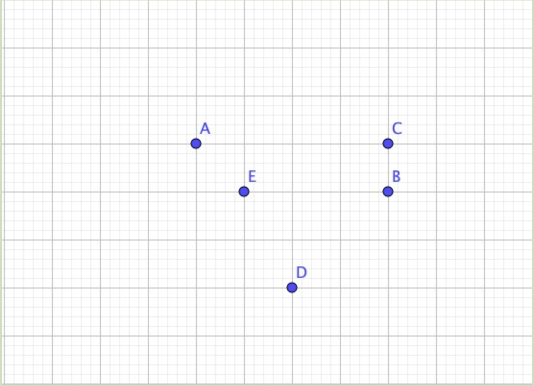
$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

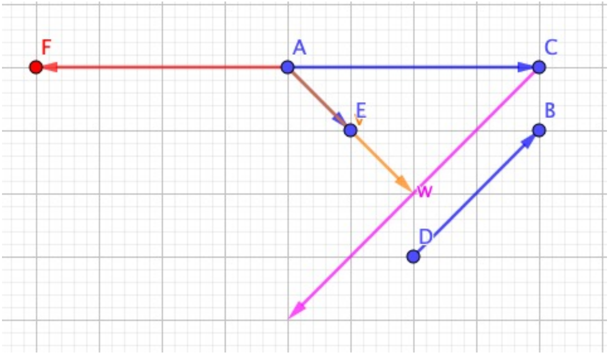
Propriété.

$$k\vec{u} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

Exercice

Sur la figure, tracer le vecteur $\vec{v} = 2\overrightarrow{AE}$ en partant du point A. Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AC}$. En partant du point C, tracer le vecteur $\vec{w} = -2\overrightarrow{DB}$.




F
A
C
E
v
B
w
D

Définition

$$\vec{u} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \cdots + c_n\vec{v_n}$$

est une combinaison linéaire des $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$

Les nombres $(c_1, \ldots, c_n)$ sont les composantes de $\vec{u}$

Définition

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre λ tel que

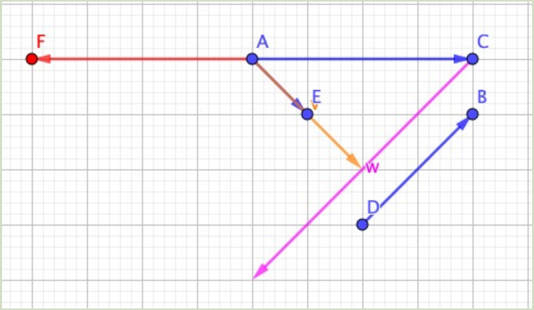
$$\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$$

ou si un des deux vecteurs est nul

Remarque : Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteur !

Exercice

Dans cette figure, quels sont les vecteurs colinéaires ?



Définition

Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ sont coplanaires si toutes les droites passant par le même point A et ayant pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ appartiennent à un même plan.

Remarque :

1. Retenir que des vecteurs coplanaires sont tous dans le même plan
2. Deux vecteurs sont toujours coplanaires
3. Quand on travaille dans le plan, tous les vecteurs sont évidemment coplanaires

Propriété.

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \qquad a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \overrightarrow{0}.$$

avec a, b et c non tous nuls

Remarque : si $c \neq 0$, alors

$$\overrightarrow{w} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{u} - \frac{b}{c}\overrightarrow{v}$$

une de ces vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des deux autres.

Et il en reste quoi ?

1. Quels sont les trois caractéristiques déterminant un vecteur ?
2. Si A et B sont deux points. Quel est la différence entre AB et $\overrightarrow{AB}$?
3. Si ABCD est un carré, que vaut $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$?
4. Et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$?
5. $\vec{u} = 4\vec{v}$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ....(?).....
6. $\vec{u} + 4\vec{v} - 6\vec{w} = 0$. On dit que $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ....(?).....

Réponses.

1. les trois caractéristiques déterminant un vecteur : Direction, sens et longueur
2. AB est la longueur. $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui va de A à B (donc avec sens, orientation et longueur)
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
4. Et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ aussi
5. $\vec{u} = 4\vec{v}$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
6. $\vec{u} + 4\vec{v} - 6\vec{w} = 0$. On dit que $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires