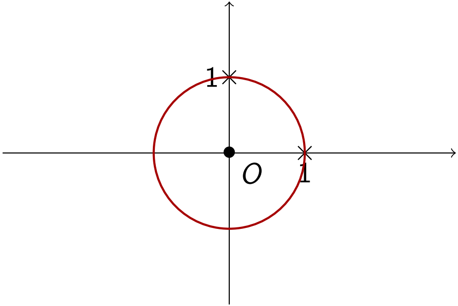
Les bases du calcul

(3)

Plan

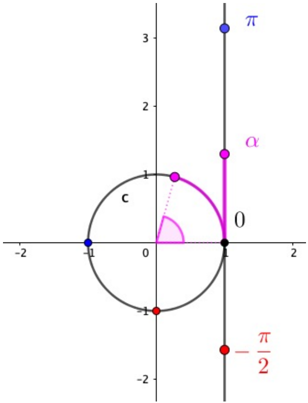
Le cercle trigonométrique

C'est le cercle de centre l'origine d'un repère orthonormé et de rayon 1.



Le radian

- unité de mesure des angles
- angle α radians $\leftrightarrow$ arc de longueur α
- proportionnel à la mesure en degré
  $360^\circ = 2\pi$ radians
- sens trigonométrique = mesure positive.
- sens des aiguilles d'une montre = mesure négative



Exercice

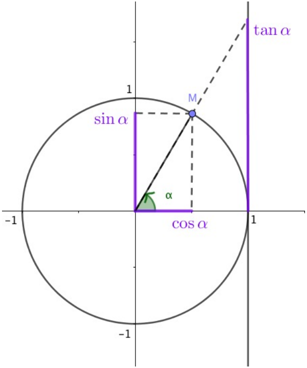
Compléter le tableau suivant donnant les correspondances d'angle radian/degré :

Degre	0	360	180			30	45		1
Radian	0	2π		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$			1	

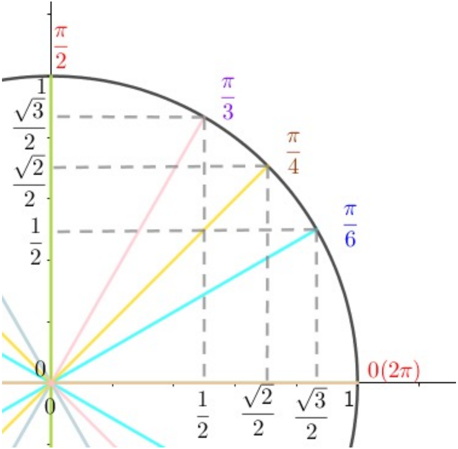
cos, sin, tan

le point situé à l'angle α sur le cercle trigonométrique a pour coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$\boxed{\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



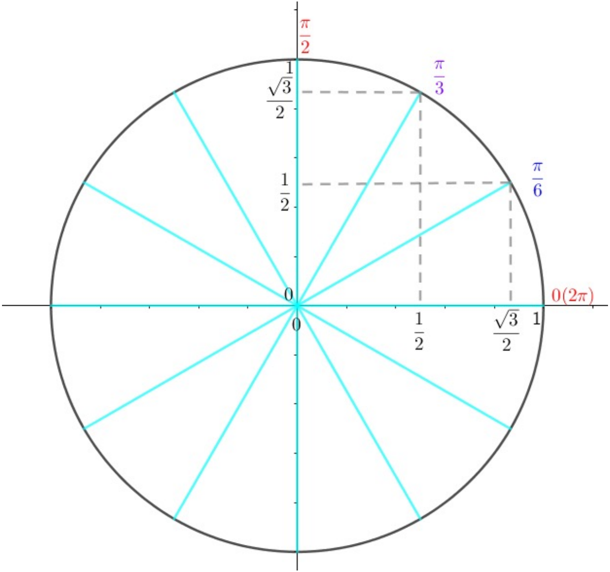
A connaître



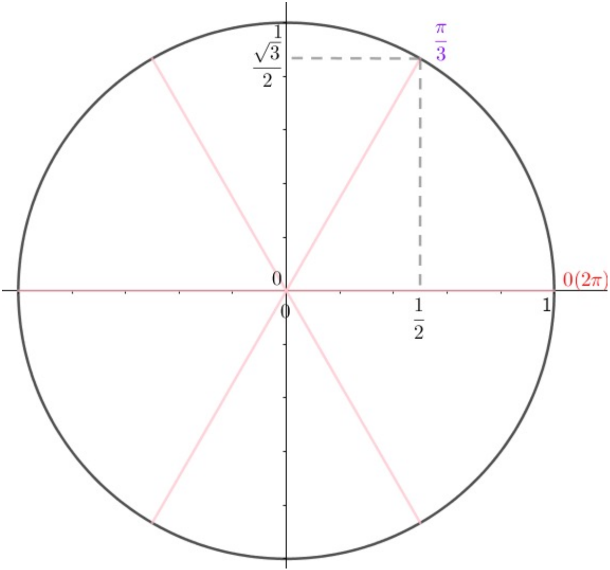
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$0(2\pi)$
1
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
0
0
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1

:

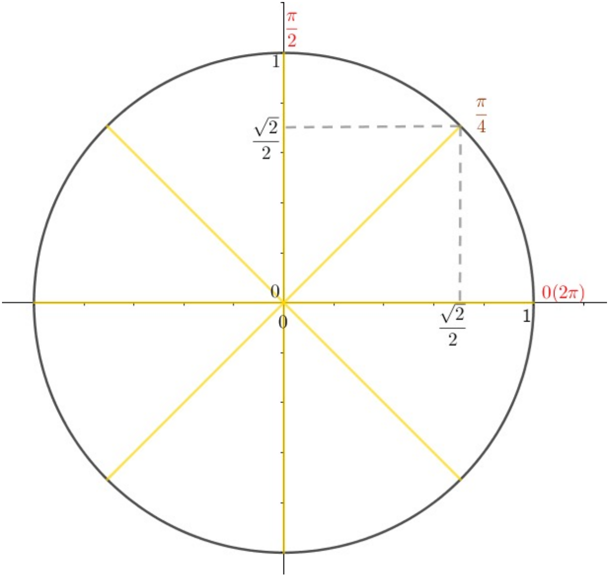
Les multiples de $\frac{\pi}{6}$



Les multiples de $\frac{\pi}{3}$



Les multiples de $\frac{\pi}{4}$



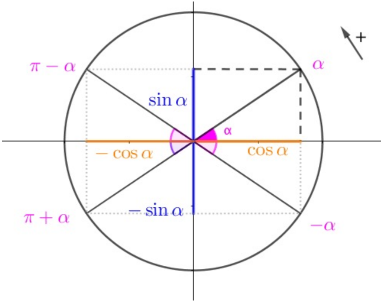
Propriétés

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x), \quad \tan(-x) = -\tan x$$

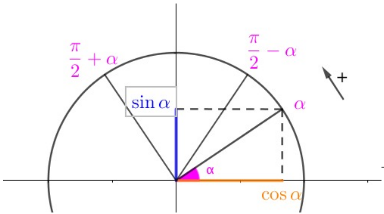
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

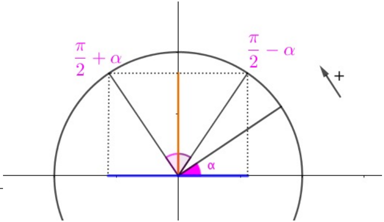
Réciproquement, si a, b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$,
alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos x$ et $b = \sin x$.

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x), \quad \sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x), \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x), \quad \tan(\pi + x) = \tan(x).$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x),\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x), \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan(x)},$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x),\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x), \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan(x)}.$$





Les formules à savoir !

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a, \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Exercice

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$
2. Déterminer la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Il faut savoir qu'elles existent

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b},$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors les formules de l'angle moitié

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Plan

$$\cos(x) = \cos\theta \Leftrightarrow$$

$$x = \theta + 2k\pi \ , \ \ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\theta + 2k\pi \ , \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque : Si on veut résoudre $\cos(x) = a$ (avec $a \in [-1; 1]$), on doit trouver θ soit par valeur standard, soit par $\theta = \mathrm{Arccos}(a)$

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin(x) = \sin\theta \Leftrightarrow$$

$$x = \theta + 2k\pi\ ,\ \ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \pi - \theta + 2k\pi\ ,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque : Si on veut résoudre $\sin(x) = b$ (avec $b \in [-1; 1]$), on doit trouver θ soit par valeur standard, soit par $\theta = \text{Arcsin}(b)$

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(\pi/3 - 4x) = \sin(3x)$.

Exercice

(TD) Résoudre

$$2\sin(\frac{x}{3}) = -1$$

Notion. les solutions de $\sin(x) = \sin\theta$ sont

$$x = \theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \pi - \theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \cos x = \cos(\theta) \\ \sin x = \sin(\theta) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Remarque : Si on a $\cos x = a$ et $\sin x = b$ et qu'on ne trouve pas un θ standard :

1. $\theta = \arccos(a)$ ou $\theta = -\arccos(a)$
2. choisir celui de même signe que b

$$\tan x = \tan \theta \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \theta + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Remarque : Si on veut résoudre $\tan(x) = c$, on doit trouver θ soit par valeur standard, soit par $\theta = \text{Arctan}(c)$

Exemple : Résoudre l'équation $\tan(x - \pi/3) = 1$ en commençant par déterminer son ensemble de définition.

L'équation $A\cos(x) + B\sin(x) = C$

on transforme

$$A\cos(x) + B\sin(x) \quad \to \quad r\cos(x-\varphi)$$

1. On factorise par $\boxed{r = \sqrt{A^2+B^2}}$

$$A\cos(x)+B\sin(x) = r\left(\frac{A}{r}\cos(x) + \frac{B}{r}\sin(x)\right) = r(\heartsuit\cos(x)+\spadesuit\sin(x))$$

2. il existe un nombre réel φ tel que $\cos(\varphi) = \heartsuit$ et $\sin(\varphi) = \spadesuit$
3. on utilise la formule cos(a+b)

$$A\cos(x) + B\sin(x) = r(\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)) = r\cos(x-\varphi).$$

Exemple : Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$.

Qu'avez-vous retenu ?

1. La bonne formule pour $\cos(a-b)$ est laquelle ?

   $$\cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

2. Que vaut $2 \sin x \cos x$?
3. La valeur de $\sin(7\pi/6)$ est laquelle ?

   $$\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 1, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}$$

4. Si on a $\sin(x) = \sin \frac{\pi}{5}$, alors quelles sont les affirmations vraies ($k \in \mathbb{Z}$) ?

   $$x = \frac{\pi}{5} + k\pi, \quad x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi.$$

Réponses

1. $$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

2. $$2 \sin x \cos x = \sin(2x)$$

3. $$\sin(7\pi/6) = -\frac{1}{2}$$

4. $$x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$$