Les bases du calcul

(1)

Vocabulaire de base

Exercice

Compléter les mots manquants :

1. Dans l'expression $3x + 5$, $3x$ et 5 sont des .....
2. Dans l'expression $12xy$, 12, x et y sont des .....
3. 7y est le ..... de 7 et y.
4. $9 + x$ est la ..... de 9 et x
5. $4x - 11$ est la ..... de $4x$ et de 11
6. $\frac{6}{5x}$ est le ..... de 6 sur $5x$.
7. $\frac{1}{27}$ est l' ..... de 27
8. Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 90,1 sont des nombres .....
9. Les nombres -5 et $-\frac{1}{3}$ sont des nombres .....
10. Dans l'expression $2x + 2$, le nombre 2 est un ..... commun.

1. Dans l'expression $3x+5$, $3x$ et 5 sont des termes.
2. Dans l'expression $12xy$, 12, x et y sont des facteurs.
3. 7y est le produit de 7 et y.
4. $9+x$ est la somme de 9 et x.
5. $4x-11$ est la différence de $4x$ et de 11.
6. $\frac{6}{5x}$ est le quotient de 6 sur $5x$.
7. $\frac{1}{27}$ est l'inverse de 27.
8. Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 90,1 sont des nombres entiers.
9. Les nombres -5 et $-\frac{1}{3}$ sont des nombres négatifs.
10. Dans l'expression $2x+2$, le nombre 2 est un facteur commun.

Calculer... à la main (tout !)

$$\begin{array}{r} 236 \\ +47 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 327 \\ -56 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 56 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 247 & 7 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Exercice

Effectuez les opérations suivantes à la main :

$$638 + 199; \quad 745 - 176; \quad 76 \times 32; \quad 346 \div 8$$

Savoir décomposer un gros nombre en produit de petits nombre

$$378 = 6 \times 7 \times 9 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$$

Trucs :

- nombre pair $\Rightarrow$ divisible par 2
- nombre finissant par 0 ou 5 $\Rightarrow$ divisible par 5.
- Si en additionnant les chiffre contenu dans le nombre, on obtient un multiple de 3 $\Rightarrow$ divisible par 3
- On teste uniquement les divisions par 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17 (nombres premiers)

Exercice

Décomposer au maximum le nombre 1092 en produit de nombres plus petits.

Les identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exercice

Développer $(x-3)^2$ et $(5-y)(5+y)$.

Priorités de calculs

Ordre des opérations :

1. multiplications/divisions/puissances
2. additions/soustractions

$$2 \times 3 + 5 \times 10 - 20 = 6 + 50 - 20 = 36$$

mais

$$2 \times (3 + 5) \times 10 - 20 = 2 \times 8 \times 10 - 20 = 160 - 20 = 140$$

Attention : les parenthèses sont prioritaires ! $(2 + 6) \times 5 = 8 \times 5 = 40$.

Exercice

Effectuer le calcul suivant : $2(2(x - 3) + 4(x + 5))$.

Avec des parenthèses

Addition

$$3+(2+5x)=3+2+5x=5+5x$$

Soustraction

$$3-(2+5x)$$

On distribue le signe $-$ sur chaque terme de l'intérieur de la parenthèse.

$$3-(2+5x)=3-2-5x=1-5x$$

Attention 5x est UN terme !

$$--\quad=\quad+\text{ et }-+\quad=\quad-$$

Multiplication

$$3(2+5x) = 3 \times (2+5x)$$

On distribue le 3 sur chaque terme de l'intérieur de la parenthèse

$$3 \times (2+5x) = 6 + 15x$$

Division

$$\frac{(2+5x)}{3} = \frac{2+5x}{3}$$

$$\frac{3}{(2+5x)} = \frac{3}{2+5x}$$

Puissances

$$(2+5x)^3, \qquad (5x)^5$$

On ne peut PAS enlever les parenthèses sans faire un calcul !

Fonctions

$$\ln(2+5x); \qquad \cos(2x+5), \qquad e^{(2x+5)}$$

On ne peut PAS enlever les parenthèses sans faire un calcul... voire même pas du tout !

Développer $=$ transformer
une expression contenant des parenthèses (avec ou sans puissances) séparées par des multiplications/divisions

en

une expression ne contenant que des addition/soustraction et quasiment plus de parenthèses.

Factoriser $=$ le contraire

Développer

Le produit de deux parenthèses

$$(2+x+3y)\times(1-x) = 2\times 1+2\times(-x)+x\times 1+x\times(-x)+3y\times 1+3y\times(-x)$$

$$= 2-2x+x-x^2+3y-3xy$$

- $3y$ est UN terme. on le distribue d'un seul coup.
- Tout comme $(-x)$
- Ne pas oublier de simplifier !

Développer

Une puissance

- identités remarquables

$$(2x+3)^2 = 4x^2 + 6x + 9$$

- binôme de Newton pour les puissances entières positives.

$$(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

- RIEN Pour les puissances non entières ou négatives (division)

$$(2x+3)^{\frac{3}{4}} \qquad (2x+3)^{-1} = \frac{1}{2x+3}$$

Exercice

Développer les expressions suivantes.

$$(2x-y)^2, \quad (5x+3)(6x-8), \quad (-5x+4+3y)(y+1)^2$$

$$(x+2)(x-1)(x+3)$$

Factoriser est l'opération inverse de développer.

- Reconnaitre une formule
- Trouver un facteur commun dans tous les termes de l'expression.

$$16x^2 + 4zx - 10x$$

$$= \underline{2} \times 8 \times \underline{x} \times x + \underline{2} \times 2 \times z \times \underline{x} - 5 \times \underline{2} \times \underline{x} = 2x(8x + 2z - 5)$$

Remarque : Quand on prend la totalité d'un terme comme facteur, il reste 1

$$3z^2 + 3z = 3z(z + 1)$$

Remarque : Certaines techniques nécessitent une factorisation « forcée »

$$4x\ln(x) + 3x^2e^x - x^5 = 3x^2e^x\left(\frac{4x\ln(x)}{3x^2e^x} + 1 - \frac{x^5}{3x^2e^x}\right)$$

$$= 3x^2e^x\left(\frac{4\ln(x)}{3xe^x} + 1 - \frac{x^3}{3e^x}\right)$$

Mais en dehors de ces techniques, ne pas l'utiliser !

Exercice

Factoriser les expressions suivantes quand c'est possible

$$r^2 + 9 + 6r, \quad 4x - 12zx^2 + 26x^3, \quad -7 - 13x - y,$$

$$\cos x + 2c, \quad -25x^2 - \frac{5}{2}\ln x$$

Les fonctions

$$f(x) \neq f \times x$$

$$f(3x+4) \neq f \times (3x+4),$$

$$f(3x+4) \neq f(3x) + f(4) \neq 3f(x) + f(4)$$

INTERDIT

- de sortir quelque chose de la parenthèse
- de distribuer la fonction
- de faire disparaitre la fonction

Attention aux écritures ambigues :

$$\cos \pi x$$

Exercice

Dans les fonctions suivantes, remplacer successivement la variable

- par 2
- par $3x$
- par $1 + 2x$

$$f(x) = 4x + 5, \quad g(x) = \frac{\ln x + 5}{x},$$
$$h(x) = \cos(2x), \quad j(x) = x^2$$

Vous en avez retenu quoi ?

1. Quelle est la forme développée et quelle est la forme factorisée ?

   $$(3x+5)(4-2y) = 6(2x-3y) + 10(2-y) = 12x - 6xy + 20 - 10y$$

2. Que valent $a^2 - b^2$ et $a^2 + b^2$?
3. Donner des diviseurs entiers positifs évidents de 1950 sans faire aucun calculs.
4. Vrai ou Faux ?

   $$5(3x-2) = 15x - 10, \quad 4 + 9y^2 = (2+3y)^2$$

5. Dans la factorisation de $16x^2 + 36 - 4y^2$, quel est le facteur commun ?
6. On note f une fonction. $f(3x+5) =$
   $3f(x+5)$, $f(3x) + f(5)$, $f(3x) + 5$ ou $3f(x) + f(5)$?

Réponse

1. La forme développée est $12x - 6xy + 20 - 10y$ et la forme factorisée $(3x+5)(4-2y)$
2. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et $a^2 + b^2$ n'est pas une formule.
3. 1950 est divisible par 1, 2, 5,10 et 3.
4. $5(3x-2) = 15x - 10$ Vrai
   $4 + 9y^2 = (2+3y)^2$ Faux
5. le facteur commun 4
6. $f(3x+5)$ ne se simplifie pas !