Applications linéaires dans les espaces $\mathbb{R}^n$

Plan

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda X_1 + X_2) = \lambda f(X_1) + f(X_2).$$

Remarque : Donc $f(0_n) = 0_p$ et $f(-X) = -f(X)$.

Définition

A matrice de taille (n, m).

L' application linéaire associée à A est

$$\begin{array}{rcl} f_A : \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \to & f_A(X) = AX \end{array}$$

Propriété.

f_A est linéaire :

$$\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^m, f_A(\lambda X_1 + X_2) = \lambda f_A(X_1) + f_A(X_2)$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

L'application linéaire associée à A est $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec

$$f_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 2z \\ 3x - 2y + z \end{pmatrix}$$

Définition

Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$

Théorème.

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

Alors il existe une unique matrice A de taille (n, m) telle que

$$\forall X \in \mathbb{R}^m, \qquad f(X) = AX$$

A est
la matrice de l'application linéaire f dans les bases canoniques.

Exercice

1. Ecrire l'application linéaire f associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Donner la matrice de l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = (x-y, 2x+3y, 5y-x)$$

Notion. Soit A une matrice. Pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^m$, on définit une fonction par $f_A(X) = AX$. On dit que f_A est l'application linéaire associée à A.

Matrice d'une application linéaire dans une autre base

Technique : à la main

$$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, \text{de matrice } A \text{ en bases canoniques}$$

$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ base de $\mathbb{R}^p$ (départ) et $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathbb{R}^n$ (arrivée)

1. calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$,...,$f(e_p)$ (images de $\mathcal{B}_1$)
2. faire les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$,...,$f(e_p)$ dans $\mathcal{B}_2$
3. mettre ces coordonnées en colonne et côte à côte dans une matrice

Définition

$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ est la matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Si f endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 \to M_{\mathcal{B}_1}(f)$.

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x,y,z) = (y+2z, x+2z)$.

$$M_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_1 \left(U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, W \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{B}_2 \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Calcul :

$$f(U) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}; \qquad f(V) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -B \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2};$$

$$f(W) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2A \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2};$$

Donc

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

On considère la matrices A et les vecteurs u, v suivants :

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

1. Calculer $f(u)$ et $f(v)$ et exprimer ces vecteurs sous la forme $au + bv$ avec a, b des constantes.
2. En déduire la matrice de f dans la base (u, v).

Notions.

1. Les coordonnes d'un vecteur x dans une base (u, v) sont les coefficients (a, b) tels que $x = au + bv$.
2. La matrice de f dans la base (u, v) est formée en colonne des vecteurs $f(u)$ et $f(v)$ exprimés dans la base (u, v).

Propriété.

- f application linéaire de matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$.
- X vecteur coordonnées $X_{\mathcal{B}_1} = (x_1, x_2, \dots)$

Les coordonnées de $f(X)$ dans $\mathcal{B}_2$ sont

$$f(X)_{\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) \times X_{\mathcal{B}_1}$$

Exemple :

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = 5U + 2V - 3W \to X_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$f(X)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = -A - 2B$$

Opérations sur les applications linéaires

Propriété.

f, g applications linéaires de matrice A et B dans $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

- $f + g$ est une application linéaire de matrice $A + B$ dans $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$
- λf est une application linéaire de matrice λA dans $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$

Théorème.

- f application linéaire de matrice $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(f)$
- g application linéaire de matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(g)$

Alors $f \circ g$ est une application linéaire de matrice

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(f) \times M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(g)$$

Théorème.

f application linéaire bijective de matrice A dans des bases $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad f(X) = Y \quad \Leftrightarrow \quad X = f^{(-1)}(Y).$$

- $f^{(-1)}$ est linéaire.
- A est inversible
- A^{-1} est la matrice de $f^{(-1)}$ dans les bases $(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est bijective.

On a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $f^{(-1)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est défini par

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad f^{(-1)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x + y \end{pmatrix}$$

matrices de passage et applications linéaires

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad A = M_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f) \to f(X) = AX$$

- départ : $\mathcal{B}_n$ base de $\mathbb{R}^n$ avec $Q = P(\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_n)$

$$X_{\mathcal{C}_n} = QX_{\mathcal{B}_n}$$

- arrivée : $\mathcal{B}_m$ base de $\mathbb{R}^m$ avec $P = P(\mathcal{C}_m, \mathcal{B}_m)$

$$Y_{\mathcal{C}_m} = PY_{\mathcal{B}_m}$$

$$Y = f(X) \quad \Leftrightarrow \quad Y = AX \quad \Leftrightarrow \quad PY_{\mathcal{B}_m} = AQX_{\mathcal{B}_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_{\mathcal{B}_m} = \underbrace{P^{-1}AQ}\, X_{\mathcal{B}_n}$$

Théorème.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad A = M_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f)$$

- départ : $\mathcal{B}_n$ base de $\mathbb{R}^n$ avec $Q = P(\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_n)$
- arrivée : $\mathcal{B}_m$ base de $\mathbb{R}^m$ avec $P = P(\mathcal{C}_m, \mathcal{B}_m)$

La matrice $M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m}(f)$de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_m$ est

$$A' = P^{-1}AQ$$

ou encore

$$M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m}(f) = P(\mathcal{B}_m, \mathcal{C}_m)M_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f)P(\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_n)$$

Les colonnes de A' sont formée des images des vecteurs de $\mathcal{B}_n$, exprimées dans la base $\mathcal{B}_m$.

Exemple : f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B} = ((1,0),(-1,1))$ base de $\mathbb{R}^2$ (arrivée et départ) avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de f en base $\mathcal{B}$ est donc

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

symétrie par rapport à l'axe D de vecteur directeur $(1,0)$, parallèlement à l'axe D' de vecteur directeur $(-1,1)$

Soit $X(x,y)$ de coordonnées (x',y') en base $\mathcal{B}$. Alors $f(X)$ en base $\mathcal{B}$ est

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -y' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Définition

Deux matrices A et A' de même taille sont équivalentes si

$$A' = P^{-1}AQ$$

avec P, Q une matrices carrées inversibles

Remarque : Ce sont les matrices de la même application linéaires, mais en considérant des bases différentes.

Plan

Noyau et Image

Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

Définition

L'image de f est

$$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^m) = \{Y = f(X), \quad \text{avec } X \in \mathbb{R}^m\}$$

$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Le noyau de f est

$$\operatorname{Ker} f = \{X \in \mathbb{R}^m \quad | \quad f(X) = \vec{0}\}$$

$\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Remarque : Le noyau et l'image contiennent chacun le vecteur nul (de la bonne taille).

Technique :

- Noyau Soit $X \in \mathbb{R}^m$ (départ).

$$X \in \operatorname{Ker} f \quad \Leftrightarrow \quad f(X) = \vec{0}_n$$

Résoudre l'équation. Les solutions forment $\operatorname{Ker} f$.

- Image Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ (arrivée).

$$Y \in \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } X \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } f(X) = Y$$

Attention, on veut les conditions sur Y pour avoir des solutions X (équations auxiliaires....)
$\operatorname{Im} f$ contient les Y vérifiant les équations auxiliaires.
Pour avoir une base de $\operatorname{Im} f$, on résout le système des équations auxiliaires.

Théorème. formule du rang

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\text{ départ })$$

Remarque : le rang de f est $\dim(\operatorname{Im} f)$.

Exemple : Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3. \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 2x-3y) \end{array}$$

Exercice

Calculer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y, y - z) \end{array}$$

Notions.

- **(Noyau)** Soit $X \in \mathbb{R}^m$ (départ). On a $X \in \operatorname{Ker} f$ si, et seulement si, $f(X) = O$ (vecteur nul de taille n). Puis on résout l'équation pour trouver toutes les solutions X. Ces solutions forment $\operatorname{Ker} f$.
- **(Image)** Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ (arrivée). On a $Y \in \operatorname{Im} f$ si, et seulement si, il existe $X \in \mathbb{R}^m$ (départ) tel que $f(X) = Y$. Et on cherche à connaitre **les conditions sur** Y pour avoir des solutions, c'est à dire les équations auxiliaires. $\operatorname{Im} f$ est alors caractérisé par le système ne contenant que les équations auxiliaires.

Propriété.

- $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$
- f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

$(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Remarque : Attention, la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ n'est pas forcément une base de $\mathrm{Im}(f)$. Il faut vérifier qu'elle est libre.

Et il en reste quoi ?

1. Donner la matrice associée à l'application $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 6x + 4y \end{pmatrix}$.
2. Dire que f est linéaire signifie que....
3. Le noyau de f est quoi ?

Réponses

1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
2. $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ pour tout vecteur x, y et constante λ
3. l'ensemble des vecteurs x tel que $f(x) = 0$.

Applications linéaires injectives, surjectives, bijectives

Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

Définition

f est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^n$ admet au plus un antécédent par f :

$$\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^m,\ f(X_1) = f(X_2) \Rightarrow X_1 = X_2.$$

f est surjective si tout élément de l'ensemble $\mathbb{R}^n$ admet au moins un antécédent par f :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n,\ \exists X \in \mathbb{R}^m,\ f(X) = Y.$$

Définition

f est bijective si f est injective et surjective. Tout élément de l'ensemble $\mathbb{R}^n$ admet exactement un antécédent par f :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n, \exists ! X \in \mathbb{R}^m,\ f(X) = Y.$$

On dit que f est un isomorphisme.

Remarque : La réciproque $f^{(-1)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vérifie

$$f \circ f^{-1}(Y) = Y, \qquad \forall Y \in \mathbb{R}^n$$

$$f^{-1} \circ f(X) = X, \qquad \forall X \in \mathbb{R}^m$$

Propriété.

Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

1. f est injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_m\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} f = 0$.
2. f est surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = n$
3. f est bijective $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ et $\dim \operatorname{Im} f = n$

Remarque : $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ un isomorphisme . Le théorème du rang donne

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^m \quad \Leftrightarrow \quad 0 + n = m$$

Donc $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$ (arrivée et départ identiques). Donc f est un endomorphisme.

f est un automorphisme : arrivée et départ identiques + bijectif.

Plan

L'homothétie vectorielle

L' homothétie vectorielle de rapport k (constante) est

$$h_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n. \\ x & \mapsto & h_k(x) = kx \end{array}$$

Montrons que h_k est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et déterminons son noyau et son image.

Les projections

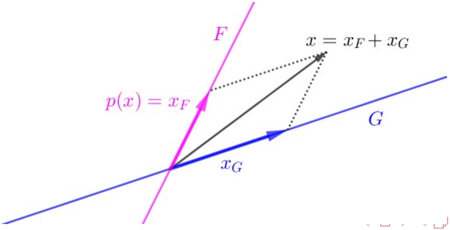
Définition

F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

$$x = x_F + x_G, \text{ avec } x_F \in F, x_G \in G$$

La projection sur F parallèlement à G est

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & p(x) = x_F \end{array}.$$



Propriété.

La projection p sur F parallèlement à G est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, qui vérifie

$$\mathrm{Im}(p) = F, \qquad \mathrm{Ker}(p) = G \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F,\ p(x) = x.$$

Remarque : $p \circ p = p$ (idempotent).

Symétries

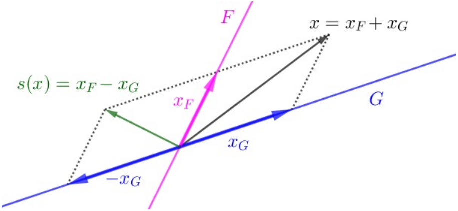
Définition

F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

$$x = x_F + x_G, \text{ avec } x_F \in F, x_G \in G$$

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & s(x) = x_F - x_G \end{array}$$



Remarque : La symétrie s par rapport à F parallèlement à G est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ et s est sa propre réciproque (autrement dit $s \circ s = \mathrm{Id}_n$). On dit que s est une involution (ou s est involutive).

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, soit $F = \mathrm{Vect}(1, 2)$ et $G = \mathrm{Vect}(-1, 1)$. Ces deux espaces sont supplémentaires. On cherche à calculer le symétrique d'un vecteur $X(x, y)$ par rapport à F et parallèlement à G.

Et il en reste quoi ?

1. une application linéaire est injective si son noyau est ... ?
2. Si F et G sont supplémentaire, avec $x = x_F + x_G$, c'est quoi le symétrique de x par rapport à F parallèlement à G ?

Réponses

1. $Ker(f) = \{\vec{0}\}$.
2. $s(x) = x_F - x_G$.